Příklady na zápočet z předmětu SIP

1. Metodou separace proměnných řešte počáteční úlohy

   (a) $x = \dot{x}\cos^2 t \ln x, \quad x(\pi) = 1$ $\qquad [\ln^2|x| - 2\,\mathrm{tg}\, t = 0]$

   (b) $x\ dt + \mathrm{cotg}\, t\ dx = 0, \quad x(\frac{\pi}{2}) = -1,$ $\qquad [x(t) = -2\cos t]$

2. Metodou variace konstanty řešte následující počáteční úlohy

   (a) $\dot{x} - x\,\mathrm{cotg}\, t = \sin t, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 0,$ $\qquad [x(t) = (t - \frac{\pi}{2})\sin t]$

   (b) $\dot{x} - \dfrac{3x}{t} = \dfrac{1 + \ln t}{t}, \quad x(1) = -\dfrac{1}{3},$ $\qquad [x(t) = \frac{t^3-4}{9} - \frac{1}{3}\ln|t|]$

3. Metodou odhadu nebo metodou variace konstant stanovte obecné řešení následujících rovnic

   (a) $y'' - y = 2e^x - x^2,$ $\qquad [y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2]$

   (b) $y'' + y = 4xe^x,$ $\qquad [y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x-2)e^x]$

4. Najděte řešení počátečních úloh

   (a) $y'' + y' = 4e^x,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -3,$ $\qquad [2\cos x - 5\sin x + 2e^x]$

   (b) $y'' - 2y' = 2e^x,\ y(1) = -1,\ y'(1) = 0,$ $\qquad [e^{2x-1} - 2e^x + e - 1]$

5. Vypočtěte parciální derivace funkce

   (a) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

   (b) $z = \mathrm{arctg}\, \frac{x}{y}$

   (c) $z = (1 + xy)^y$

   (d) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

6. Najděte gradient dané funkce v bodě P

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x - y^2, \quad P = [1,1]$ $\qquad [(4,1)]$

   (b) $f(x,y) = x\cos y, \quad P = [1,\pi]$ $\qquad [(-1,0)]$

7. Najděte derivaci funkce f v bodě P ve směru α:

   (a) $f(x,y) = x^2 - 2y^2, \quad P = (1,2),\ \alpha = \frac{\pi}{4},$ $\qquad [-3\sqrt{2}]$

   (b) $f(x,y) = x\cos xy, \quad P = (1,0),\ \alpha = \frac{\pi}{3},$ $\qquad [\frac{1}{2}]$

8. Ukažte, že daná funkce vyhovuje uvedené rovnici

   (a) $z = \ln(e^x + e^y), \quad \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0;$

   (b) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \dfrac{2}{r}$.

9. Ukažte, že funkce $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ splňuje Laplaceovu rovnici $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

10. Vypočtěte $y' = \dfrac{dy}{dx}$ v daném bodě P, je-li funkce $y = y(x)$ dána implicitně rovnicí

    (a) $x^2 - xy - y^2 + 5 = 0, \quad P = (1,2),$ $\qquad [0]$

    (b) $e^{xy} + 2 = x + y, \quad P = (3,0),$ $\qquad [\frac{1}{2}]$

11. Určete stacionární body a vyšetřete extrémy funkce $f(x,y)$.

    (a) $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3,$ $\qquad [(0,0)$ sedlový bod, $f_{min} = f(2,2) = -8]$

    (b) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3,$ $\qquad [(0,0)$ sedlový bod, $f_{min} = f(1,1) = -1]$

12. Vypočtěte dvojné integrály

(a) $\iint\limits_D xy^2dxdy$, $D = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2; 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$ $[\frac{1}{40}]$

(b) $\iint\limits_D xydxdy$, $D = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$ $[2]$

(c) $\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy$, kde D je čtvrtina kruhu $x^2 + y^2 \leq 1$ v I. kvadrantu; $[\frac{\pi}{6}(8 - 3\sqrt{3})]$

13. Vypočtěte $\iiint\limits_\Omega f\ dx\,dy\,dz$ pro danou funkci f a danou oblast Ω.

(a) $f(x,y,z) = x+y+z$, Ω je oblast ohraničená rovinami $y = 0$, $y = 2$, $x = 0$, $x = y$, $z = 0$, $z = x+y$; $[14]$

(b) $f(x,y,z) = x$; Ω je oblast v prvním oktantu pod plochou $z = 4 - x^2 - y^2$. $[\frac{64}{15}]$

(c) $f(x,y,z) = \dfrac{xy^3z}{(1+z^2)^2}$; $\Omega = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. $[-\frac{1}{60} + \frac{1}{60}\ln 5]$

14. Určete poloměr konvergence a v krajních bodech oboru konvergence vyšetřete chování mocninné řady
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$; $[R = 1$, div. pro $x = \pm 1]$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $[R = +\infty]$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)!x^n$ $[R = 0]$

15. Určete poloměr a střed konvergence mocninné řady
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n)!}{n^n(2n)!}\, x^n$; $[R = \dfrac{4e}{27}$, střed $x = 0]$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}\, (x-2)^n$; $[R = e$, střed $x = 2]$

16. V okolí bodu $x_0 = 0$ najděte Taylorovu řadu funkce $f(x) = \cos x$.

17. Rozviňte ve Fourierovu řadu periodickou funkci f, je-li na základním intervalu periodicity dána předpisem

(a) $f(t) = \dfrac{t^2}{2}$ pro $t \in <0, 2\pi)$; $[\frac{2}{3}\pi^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos kt - 2\pi\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin kt,\ t \neq 2k\pi]$

(b) $f(t) = \dfrac{t}{2}$ pro $t \in (-\pi, \pi)$, $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. $[\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin kt,\ t \in \mathbf{R}]$