Kapitola 9

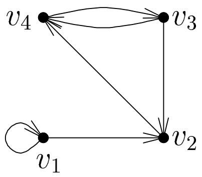
Cesty v grafu

9.1 Matice sousednosti a počty sledů

Definice 9.1 Nechť G je orientovaný graf na vrcholech $\{v_1, \ldots, v_n\}$. *Matice sousednosti* grafu G je reálná matice o rozměrech $n \times n$, definovaná předpisem $S(G) = (\sigma_{ij})$, kde

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } v_i v_j \in E(G), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

pro $i, j = 1, \ldots, n$.



Obrázek 9.1: Orientovaný graf.

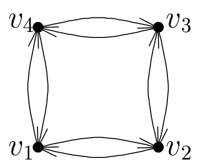
Například graf na obr. 9.1 má matici sousednosti

$$S(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice sousednosti *neorientovaného* grafu je definována jako matice sousednosti jeho symetrické orientace. (Připomeňme, že symetrická orientace je orientovaný graf, který vznikne, pokud každou hranu nahradíme dvojicí protichůdných orientovaných hran.)

Při počítání matice sousednosti například pro neorientovaný cyklus C_4 o délce 4 musíme tedy přejít k orientovanému grafu na obr. 9.2 a zjistíme, že matice sousednosti je

$$S(C_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 9.2: Symetrická orientace cyklu délky 4.

Cvičení 9.2 Nechť $L(G)$ je Laplaceova matice neorientovaného grafu G (viz kapitola **??**). Určete součet $L(G) + S(G)$.

Z matice $S(G)$ lze poměrně jednoduše zjistit počet všech sledů se zadaným začátkem, koncem a délkou v orientovaném grafu G. Pro $k > 0$ budeme symbolem $\sigma_{ij}^{(k)}$ označovat prvek na pozici (i, j) v k-té mocnině matice $S(G)$. Nultá mocnina této matice je definována jako identická matice E_n. Pro vrcholy $x, y \in V(G)$ budeme pojmem *xy-sled* rozumět sled z x do y v grafu G.

Věta 9.3 *Nechť G je orientovaný graf a $k \geq 0$. Prvek $\sigma_{ij}^{(k)}$ matice $(S(G))^k$ je roven počtu v_iv_j-sledů délky přesně k v grafu G.*

Důkaz. Označme počet v_iv_j-sledů délky k jako P_{ij}^k. Dokazujeme tedy, že $P_{ij}^k = \sigma_{ij}^{(k)}$. Pro stručnost budeme psát $E = E(G)$. Důkaz provedeme indukcí podle k.

Pro $k = 0$ je matice $(S(G))^k$ rovna identické matici, takže $\sigma_{ij}^{(0)} = 1$, právě když $i = j$. Na druhou stranu sled délky 0 z v_i do v_j existuje, právě když $i = j$, a pak je právě jeden. Odtud $P_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{(0)}$. Případ $k = 0$ je tedy probrán.

Nechť je tvrzení dokázáno pro $k' < k$. Uvažme libovolný v_iv_j-sled $(z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k)$ délky k (takže $z_0 = v_i$ a $z_k = v_j$). Vynecháme-li poslední vrchol, dostaneme v_iz_{k-1}-sled délky $k - 1$, z jehož posledního vrcholu vede hrana do v_j. Naopak každý sled délky $k - 1$, který začíná ve vrcholu v_i a končí ve vrcholu, ze kterého vede hrana do v_j, určuje v_iv_j-sled délky k. Jak lze snadno ověřit, jedná se o bijektivní vztah mezi sledy těchto dvou typů.

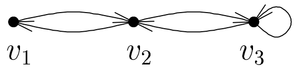
Počet v_iv_j-sledů délky k je tedy roven celkovému počtu v_iv_ℓ-sledů délky $k-1$, kde v_ℓ probíhá všechny vrcholy s vlastností $v_\ell v_j \in E$. Proto platí

$$\begin{aligned} P_{ij}^k &= \sum_{v_\ell:\ v_\ell v_j \in E} P_{i\ell}^{k-1} = \sum_{v_\ell:\ v_\ell v_j \in E} \sigma_{i\ell}^{(k-1)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_{i\ell}^{(k-1)} \cdot \sigma_{\ell j}^{(1)} \\ &= \sigma_{ij}^{(k)}, \end{aligned}$$

kde druhá rovnost plyne z indukčního předpokladu a poslední z definice násobení matic $(S(G))^{k-1}$ a $S(G)$. □

Uvažme jako příklad sledy délky 3 v orientovaném grafu G na obr. 9.3. Jeho matice sousednosti a třetí mocnina této matice vypadají takto:

$$S(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (S(G))^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 9.3: Orientovaný graf na 3 vrcholech.

Z matice $(S(G))^3$ lze například vyčíst, že v grafu G existuje jeden v_3v_1-sled délky 3 (totiž $v_3v_3v_2v_1$) nebo tři v_2v_3-sledy délky 3: jsou to $v_2v_1v_2v_3$, $v_2v_3v_2v_3$ a $v_2v_3v_3v_3$.

Cvičení 9.4 Kolik sledů délky 3 z v_2 do v_2 existuje v grafu na obr. **??**? Najděte je.

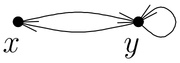
Příklad 9.5 Uvažme neorientovanou kružnici C_4 délky 4 s vrcholy očíslovanými proti směru hodinových ručiček. Určeme počty sledů délky 4 mezi různými dvojicemi vrcholů v tomto grafu. Matici sousednosti grafu C_4 jsme našli na začátku kapitoly (přechodem k symetrické orientaci). Snadno spočítáme, že

$$(S(C_4))^4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že pro sousední vrcholy v_i, v_j neexistuje žádný v_iv_j-sled délky 4, zatímco pokud $i = j$ nebo v_i a v_j jsou protilehlé, pak počet takových sledů je 4. Například (uzavřené) sledy z v_1 do v_1 délky 4 jsou: $v_1v_2v_1v_2v_1$, $v_1v_4v_1v_4v_1$, $v_1v_2v_3v_4v_1$ a $v_1v_4v_3v_2v_1$.

Cvičení 9.6 * Nechť F_k je počet xy-sledů délky k v grafu na obr. 9.4. Určete rekurentní vztah pro posloupnost $(F_1, F_2, \ldots)$.

Nápověda: Tato posloupnost se nazývá *Fibonacciho posloupnost*, podrobnosti viz [?].



Obrázek 9.4: Určete počet xy-sledů.

9.2 Vzdálenost

Definice 9.7 *Vzdálenost* $d(x, y)$ vrcholů x, y orientovaného grafu G je délka nejkratší cesty z x do y. Pokud taková cesta neexistuje, položíme $d(x, y) = \infty$.

Pojem vzdálenosti je zde definován pro orientované grafy. Pro grafy neorientované jej můžeme definovat prostřednictvím symetrické orientace. Vzdálenost vrcholů v neorientovaném grafu G je tak jejich vzdálenost v symetrické orientaci tohoto grafu.

Podobně je tomu i u dalších pojmů v tomto oddílu, které nebudeme explicitně definovat pro neorientované grafy.

Cvičení 9.8 Ověřte, že pro funkci $d(x, y)$, udávající vzdálenost vrcholů x, y v souvislém *neorientovaném* grafu G, platí pro každé $x, y, z \in V(G)$:

(1) $d(x, y) \geq 0,$ přičemž $d(x, y) = 0$, právě když $x = y$,

(2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ ('trojúhelníková nerovnost').

Tyto podmínky definují pojem *metrika*. Vzdálenost v grafu je tak speciálním případem metriky.

Definice 9.9 *Distanční matice* orientovaného grafu G s vrcholy $v_1, \ldots, v_n$ je matice

$$D(G) = \Big(d(v_i, v_j)\Big)_{i,j=1}^{n}$$

o rozměrech $n \times n$.

Cvičení 9.10 Dokažte, že leží-li vrcholy v_i, v_j v různých kvazikomponentách orientovaného grafu G, pak $d(v_i, v_j) = \infty$ nebo $d(v_j, v_i) = \infty$.

Například distanční matice grafu G na obr. 9.1 je

$$D(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ \infty & 0 & 2 & 1 \\ \infty & 1 & 0 & 1 \\ \infty & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Distanční matice neorientovaného grafu je definována jako distanční matice jeho symetrické orientace.

> **Cvičení 9.11** Určete distanční matici neorientované kružnice C_n a orientovaného cyklu $\vec{C}_n$ na n vrcholech.

Viděli jsme, že matice sousednosti a její mocniny umožňují zjistit počet sledů dané délky mezi dvěma vrcholy. Snadno odvodíme následující tvrzení, ve kterém symbol $\sigma_{ij}^{(k)}$ nadále představuje prvek na pozici (i,j) v k-té mocnině matice sousednosti $S(G)$.

Tvrzení 9.12 *Prvek $d(v_i, v_j)$ distanční matice $D(G)$ je roven nejmenšímu k, pro které $\sigma_{ij}^{(k)} \neq 0$ (případně ∞, pokud takové k neexistuje).*

Důkaz. Nechť M je množina všech k, pro které $\sigma_{ij}^{(k)} \neq 0$. Cesta z v_i do v_j existuje právě tehdy, když existuje nějaký sled z v_i do v_j. Řečeno obráceně, $d(v_i, v_j) = \infty$, právě když $M = \emptyset$. Jsou-li splněny tyto podmínky, tvrzení platí.

Nechť tedy délka nejkratšího sledu z v_i do v_j je k_0. Je jasné, že k_0 je nejmenší prvek množiny M. Z cvičení **??** víme, že nejkratší sled z v_i do v_j je nutně cestou, takže také $d(v_i, v_j) = k_0$. Důkaz je hotov. □

Z uvedeného tvrzení dostáváme horní odhad časové náročnosti sestavení distanční matice. Vzhledem k tomu, že vzdálenost libovolných dvou vrcholů je buď menší než n, nebo nekonečná (graf na n vrcholech neobsahuje žádnou cestu délky $\geq n$), stačí pro zjištění matice $D(G)$ spočítat $n-1$ mocnin matice sousednosti $S(G)$. Výpočet každé mocniny spočívá ve vynásobení dvou matic o rozměrech $n \times n$, které vyžaduje $O(n^3)$ aritmetických operací. Celková doba výpočtu tak bude $O(n^4)$.

Ukažme si aplikaci tvrzení 9.12 na grafu G z obr. **??**. Jeho distanční matici jsme sice odvodili i přímo z definice, u větších grafů je však mnohem jednodušší použít následující obecný postup. Spočítáme první čtyři mocniny matice sousednosti (včetně nulté). Jednotlivé položky jsou zvýrazněny v nejnižší mocnině, kde jsou nenulové:

$$(S(G))^0 = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix}, \qquad (S(G))^1 = \begin{pmatrix} 1 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & \underline{1} & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(S(G))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (S(G))^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro každou položku nyní zapíšeme, ve které mocnině je zvýrazněná; dostaneme distanční matici $D(G)$. Všimněme si, že u položek, které jsou nulové ve všech $(S(G))^k$ pro $k < n$, můžeme psát ∞.

$$D(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ \infty & 0 & 2 & 1 \\ \infty & 1 & 0 & 1 \\ \infty & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 9.13 Jak lze z distanční matice orientovaného grafu poznat, zda je graf silně souvislý?

Z mocnin matice sousednosti lze určit, zda je daný graf acyklický.

Tvrzení 9.14 *Orientovaný graf G je acyklický, právě když nějaká mocnina jeho matice sousednosti je nulová.*

Důkaz. '$\Rightarrow$': V acyklickém grafu je každý sled cestou. Má-li graf n vrcholů, pak v něm neexistuje cesta na $n+1$ vrcholech (cesta délky n), a tedy ani žádný sled délky n. Podle věty 9.3 je $(S(G))^n = \mathbf{0}$.

'$\Leftarrow$': Nechť $(S(G))^k = \mathbf{0}$. Podle věty 9.3 v grafu G neexistuje žádný sled délky k. Pokud ovšem G obsahuje nějaký cyklus C, obsahuje také sledy všech délek (stačí obcházet C kolem dokola). Graf G tedy musí být acyklický. □

9.3 Ohodnocené grafy

Uvažme graf, jehož vrcholy jsou evropská města a hrany jsou železniční tratě, které je spojují. Chceme-li najít nejkratší cestu vlakem dejme tomu z Budapešti do Paříže, není ani tak důležité, kolik hran našeho grafu bude tato cesta obsahovat — zajímá nás spíše, kolik kilometrů bude měřit. Bude tedy nutné přidat do grafu dodatečnou informaci o 'délce' jednotlivých hran. Dostaneme tzv. ohodnocený graf.

Definice 9.15 *Ohodnocený orientovaný graf* (G, w) je orientovaný graf G spolu s reálnou funkcí $w : E(G) \to (0, \infty)$. Je-li e hrana grafu G, číslo $w(e)$ se nazývá její *ohodnocení* nebo *váha*.

Podobně je definována neorientovaná verze ohodnoceného grafu. I v tomto oddílu budeme hovořit především o orientovaných grafech, s tím, že k neorientovanému případu lze vždy přejít přes symetrickou orientaci. Ohodnocení hran symetrické orientace grafu (G, w) je přirozeně odvozeno z původního ohodnocení (obě protichůdné hrany vzniklé z neorientované hrany e dostanou ohodnocení $w(e)$).

Často je vhodné uvažovat grafy bez ohodnocení jako speciální případy ohodnocených grafů, v nichž je váha každé hrany rovna jedné. V rámci této představy můžeme definovat následující zobecnění matice sousednosti.

Definice 9.16 *Vážená matice sousednosti* ohodnoceného orientovaného grafu (G, w) s vrcholy $v_1, \dots, v_n$ je matice $W(G) = (w_{ij})$, kde

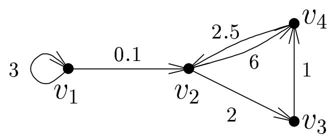
$$w_{ij} = \begin{cases} w(v_i v_j) & \text{pokud } v_i v_j \in E(G), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

pro $i, j = 1, \dots, n$.

Všimněme si jedné důležité věci: nezáporné čtvercové matice jednoznačně odpovídají ohodnoceným orientovaným grafům. Například matici

$$W = \begin{pmatrix} 3 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

odpovídá graf na obr. 9.5.



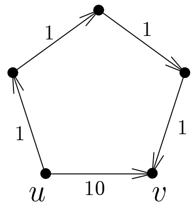
Obrázek 9.5: Ohodnocený orientovaný graf G popsaný maticí W.

Cvičení 9.17 Které matice odpovídají ohodnoceným neorientovaným grafům?

Přirozeným zobecněním délky cesty v neohodnoceném grafu je její váha.

Definice 9.18 *Váha* $w(P)$ cesty P v ohodnoceném orientovaném grafu (G, w) je součet vah jednotlivých hran této cesty. Jsou-li u, v vrcholy grafu G, pak *minimální cesta* z u do v je každá cesta, jejíž váha je minimální (tj. žádná cesta z u do v nemá menší váhu). *Vážená vzdálenost* $d^w(u, v)$ vrcholů u, v je váha minimální cesty z u do v.

Poznamenejme, že podle této definice je speciálně $d^w(u, u) = 0$. Dále si všimněme, že minimální cesta z u do v zdaleka nemusí být nejkratší, pokud jde o počet hran. Příkladem je graf na obr. 9.6.



Obrázek 9.6: Minimální cesta z u do v nemusí být nejkratší.

9.4 Hledání minimální cesty

Jak lze najít váženou vzdálenost vrcholů v ohodnoceném grafu? Asi nejznámějším postupem je *Dijkstrův*[1] *algoritmus*, který si ukážeme v tomto oddílu. Vstupem algoritmu je ohodnocený orientovaný graf (G, w) a vrchol $v \in V(G)$. Jeho výstupem je pro každý vrchol x:

(1) vážená vzdálenost $d^w(v, x)$ vrcholů v a x,

(2) (nějaká) minimální cesta P_x z v do x.

'Počítá' tedy mnohem víc než jen váženou vzdálenost dané dvojice vrcholů.

Algoritmus proběhne v nejvýše n krocích. V celém jeho průběhu bude definován strom T, jehož vrcholy tvoří podmnožinu $V(G)$ (na počátku to bude jediný vrchol v, postupně se T rozšíří až na kostru grafu G). Pro každý vrchol $x \in V(G)$ bude dále určen *odhad vzdálenosti* $c(x)$. I toto číslo se typicky bude měnit a po dokončení algoritmu bude rovno vážené vzdálenosti $d^w(v, x)$. Pro všechny vrcholy z s konečnou nenulovou hodnotou $c(z)$ bude definován jejich *předchůdce* $\bar{z}$.

I. Příprava: T budiž strom na jediném vrcholu v. Položíme $c(v) := 0$ a pro všechny ostatní vrcholy $x \in V(G)$ definujeme $c(x) := \infty$. Předchůdce není určen pro žádný vrchol.

II. Jeden krok algoritmu: Pokud $V(T)$ je kostra grafu G nebo každý vrchol $z \notin V(T)$ má $c(z) = \infty$, přejdeme na bod III. Jinak mezi vrcholy $z \notin V(T)$ vybereme vrchol x, který má minimální hodnotu $c(x)$. Je-li jich víc, zvolíme mezi nimi libovolně. Přidáme do stromu T vrchol x a hranu $\bar{x}x$ (předchůdce vrcholu x je jistě definován, protože $c(x)$ je konečné).

Dále pro všechny vrcholy $z \notin V(T)$, pro něž je xz hranou grafu G, přepočítáme odhad vzdálenosti: je-li $c(x) + w(xz) < c(z)$, položíme $c(z) := c(x) + w(xz)$ a rovněž $\bar{z} = x$. Opakujeme bod II.

III. Konec: Pro každý vrchol $x \in V(T)$ je hledanou minimální cestou P_x cesta z v do x ve stromu T (která je jednoznačně určena). Její váha určuje váženou vzdálenost $d^w(v, x)$. Pro ostatní vrcholy x žádná cesta z v do x neexistuje a $d^w(v, x) = \infty$.

[1] E. W. Dijkstra, holandský matematik.

9.5 w-distanční matice

...