3 Uspořádání a svazy

Ekvivalence nejsou jediným zajímavým speciálním případem relací. V této kapitole uvidíme další takový pojem: uspořádání.

Definice 3.1 *Uspořádání* na množině X je libovolná relace na X, která je reflexívní, (slabě) antisymetrická a tranzitivní.

Oproti definici ekvivalence jsme tedy 'pouze' zaměnili symetričnost za antisymetričnost. Účinky této změny jsou však značné.

Je-li R uspořádání na množině X, pak dvojice (X, R) se nazývá *uspořádaná množina*. Jsou-li prvky x, y v relaci R (tedy $x \mathrel{R} y$), interpretujeme to jako 'prvek x je menší nebo roven prvku y'. To je v souladu se všemi třemi základními vlastnostmi uspořádání. Uspořádáním z naší definice se také říká *neostrá uspořádání*, protože pro každé x platí $x \mathrel{R} x$. (U *ostrého* uspořádání bychom požadavek reflexivity nahradili *antireflexivitou*: pro žádné x neplatí $x \mathrel{R} x$.) Neostrá uspořádání často značíme jako $\leq$ nebo $\preceq$.

Snadno se ověří, že vlastnosti uspořádání má například 'standardní uspořádání' $\leq$ na reálných číslech. Poněkud zajímavější je možná fakt, že uspořádáním je i relace definovaná vztahem 'x dělí y' na přirozených číslech. (Dokažte.) Tyto dva příklady se liší v jednom důležitém ohledu, který podrobně rozebereme.

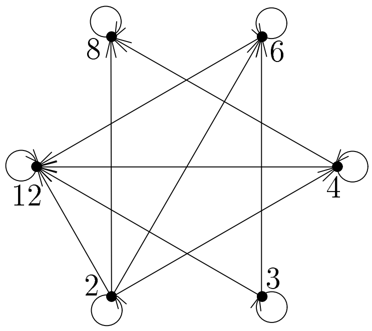
Nechť x, y jsou dva prvky uspořádané množiny $(X, \preceq)$. Platí-li $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$, jsou prvky x, y *porovnatelné*, v opačném případě jsou *neporovnatelné*. Uspořádání $\preceq$ se často označuje jako *částečné*, protože definice 3.1 připouští existenci dvojic neporovnatelných prvků. Podobně o množině $(X, \preceq)$ mluvíme jako o *částečně uspořádané množině*.

Při standardním uspořádání $\leq$ na množině $\mathbf{R}$ jsou každé dva prvky porovnatelné. Takovým uspořádáním se říká *lineární* nebo *úplné*. Důvodem pro první označení je fakt, že lineární uspořádání řadí prvky dané množiny do jedné linie, 'od nejmenšího k největšímu'. Lépe to uvidíme, až budeme mluvit o Hasseových diagramech. Náš druhý příklad, relace dělitelnosti na přirozených číslech, lineární není, jak ukazuje například neporovnatelná dvojice $\{2, 3\}$. Zdůrazněme ovšem, že *oba* zmíněné příklady spadají do obecnější kategorie částečných uspořádání.

Přidejme ještě třetí příklad uspořádání. Pro libovolnou množinu A můžeme uvážit nějaký soubor $\mathcal{B}$ jejích podmnožin. Na souboru $\mathcal{B}$ je pak přirozeně definováno *uspořádání inkluzí* $\subseteq$: podmnožiny $B, B' \in \mathcal{B}$ budou v relaci (tedy $B \subseteq B'$), pokud B je podmnožinou množiny B'. Ani uspořádání $\subseteq$ obecně není lineární.

Libovolné uspořádání samozřejmě můžeme, stejně jako každou jinou relaci, znázornit v podobě orientovaného grafu. Obrázek 1 je znázorněním uspořádání dělitelností na množině $\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Jako prostředek pro znázornění uspořádání ovšem obrázek 1 není příliš vhodný, řada šipek je v něm totiž zbytečných. Smyčky u vrcholů by například nebylo nutné kreslit, protože každé uspořádání je z definice reflexívní. Podobně



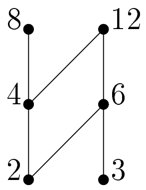
Obrázek 1: Uspořádání dělitelností na množině $\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

jsou-li v relaci dvojice $(2, 4)$ a $(4, 12)$, musí z tranzitivity být 2 v relaci s 12 a tuto šipku by rovněž nebylo potřeba kreslit. Efektivní znázornění uspořádání představuje tzv. Hasseův diagram.

Definujme nejprve jeden pomocný pojem. Nechť x, y jsou prvky uspořádané množiny $(X, \preceq)$. Prvek x je *bezprostředním předchůdcem* prvku y (psáno $x \lhd y$), pokud $x \preceq y$ a neexistuje žádné $z \in X \setminus \{x, y\}$, pro které by platilo $x \preceq z \preceq y$. Na vztah $\lhd$ se můžeme dívat jako na relaci na množině X (tzv. relace bezprostředního předcházení). Tato relace obecně není reflexívní ani tranzitivní.

Cvičení 3.2 Jak vypadá relace bezprostředního předcházení na uspořádané množině $(\mathbf{R}, \leq)$?

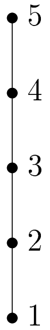
Hasseův diagram uspořádané množiny $(X, \preceq)$ je znázornění, ve kterém pro každou dvojici prvků $x, y \in X$ platí $x \lhd y$, právě když x, y jsou spojeny čarou a prvek y je nakreslen výše než x. Spojnice není nutné opatřovat šipkou, protože směr je jednoznačně dán. Na obr. 2 vidíme, že Hasseovým diagramem lze uspořádanou množinu z obr. 1 znázornit mnohem přehledněji.



Obrázek 2: Hasseův diagram uspořádání z obr. **??**.

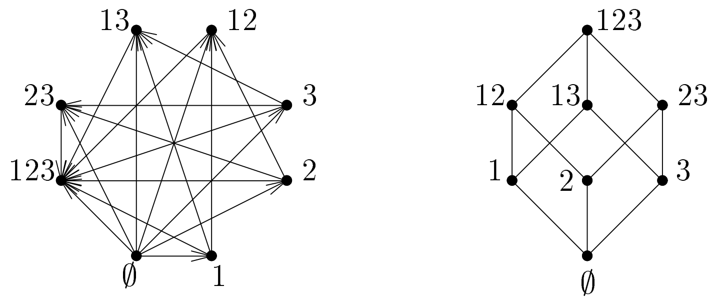
Hasseův diagram lineárně uspořádané množiny vypadá podobně, jako na obr. 3, který zachycuje standardní uspořádání na množině přirozených čísel $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Jako další příklad uvažme uspořádání inkluzí na množině všech podmnožin množiny $\{1, 2, 3\}$. Běžné zobrazení a nepoměrně přehlednější Hasseův diagram



Obrázek 3: Hasseův diagram obvyklého lineárního uspořádání na množině $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

tohoto uspořádání ukazuje obr. 4. Podmnožiny jsou popsány zkráceně, například místo $\{1, 3\}$ píšeme prostě 13.



(a) (b)

Obrázek 4: Dvě znázornění uspořádání inkluzí na souboru všech podmnožin množiny $\{1, 2, 3\}$: (a) orientovaný graf (s vynechanými smyčkami), (b) Hasseův diagram.

Cvičení 3.3 Nakreslete Hasseův diagram uspořádání dělitelností na množině $\{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 36, 60\}$.

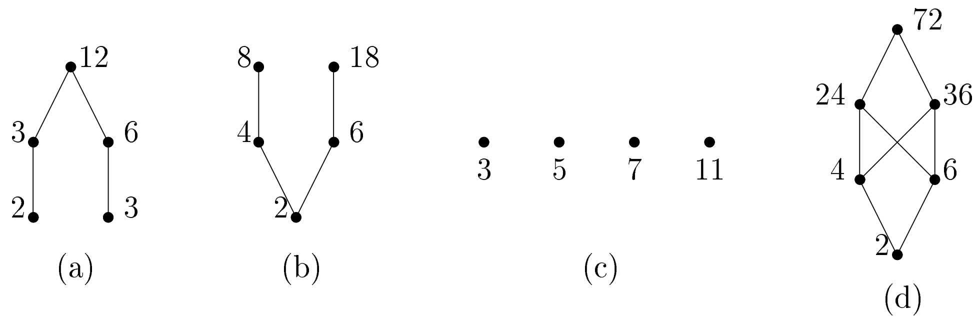
Cvičení 3.4 Nechť R je relace na množině X. *Uzávěr* (též *reflexívně-tranzitivní uzávěr*) relace R je relace R^* na množině X definovaná následujícím předpisem. Pro libovolné $x, y \in X$ je $(x, y) \in R^*$, pokud $x = y$ nebo existuje posloupnost $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ prvků množiny X taková, že $x_i \, R \, x_{i+1}$ pro každé i mezi 0 a $k-1$.

(a) Ukažte, že každé uspořádání na konečné množině X je uzávěrem své relace bezprostředního předcházení.

(b) Najděte příklad nekonečné uspořádané množiny, pro kterou tomu tak není.

Zaveďme několik pojmů označujících význačné prvky uspořádané množiny. Mějme uspořádanou množinu $(X, \preceq)$. Prvek $a \in X$ je *největším* prvkem množiny X, pokud pro každé $x \in X$ platí $x \preceq a$. Podobně *nejmenší* prvek množiny X je prvek a takový, že $a \preceq x$ pro každé $x \in X$.

Největší prvek obecně nemusí existovat, ale existuje-li, pak je určen jednoznačně. Například na obr. 5a–d existuje pouze v případech (a) a (d). Nejmenší prvek existuje pouze v případech (b) a (d).



Obrázek 5: Hasseův diagram dělitelnosti na množině X, kde (a) $X = \{2, 3, 4, 6, 12\}$, (b) $X = \{2, 4, 6, 8, 18\}$, (c) $X = \{3, 5, 7, 11\}$, (d) $X = \{2, 4, 6, 24, 36, 72\}$.

Prvky 8 a 18 na obr. 5b sice nejsou největší, ale mají alespoň tu vlastnost, že žádný prvek není větší. Jedná se o tzv. maximální prvky. Prvek $a \in X$ je *maximálním prvkem*, pokud pro žádné $x \in X$ není $a \preceq x$. Symetricky: *minimální prvek* je takový prvek $a \in X$, že pro žádné $x \in X$ není $x \preceq a$.

Je jasné, že případný největší prvek musí být maximální, a také, že obrácená implikace neplatí. Následující tabulka uvádí maximální a minimální prvky v jednotlivých příkladech na obr. 5.

příklad	maximální	minimální
a	12	2, 3
b	8, 18	2
c	3, 5, 7, 11	3, 5, 7, 11
d	72	2

Cvičení 3.5 Dokažte, že v uspořádané množině existuje nejmenší prvek, právě když v ní existuje přesně jeden minimální prvek.

Vraťme se k uspořádání inkluzí na podmnožinách dané množiny. Příklad Hasseova diagramu takového uspořádání je na obr. 4b. Dá se z tohoto diagramu vyčíst více, než jenom které podmnožiny jsou ve vztahu inkluze — například jaký je průnik či sjednocení dvou množin? Jinými slovy, je možné definovat sjednocení dvou množin pouze s použitím uspořádání inkluzí?

Sjednocení množin A,B je množina, která obsahuje jak množinu A, tak množinu B (jako podmnožiny), ale 'neobsahuje nic navíc'. Přesněji řečeno, je to nejmenší ze všech množin, které jsou větší než A i než B. Slova 'nejmenší' a 'větší' se tu samozřejmě vztahují k uspořádání inkluzí. Níže definovaný pojem suprema tak lze chápat jako (dalekosáhlé) zobecnění pojmu sjednocení.

Prvek z je *horní závorou* dvojice prvků x, y uspořádané množiny $(X, \preceq)$, pokud platí $x \preceq z$ a $y \preceq z$. *Supremum* (jinak též *spojení*) prvků x, y je nejmenší ze všech jejich horních závor, tedy takový prvek s, který je horní závorou dvojice x, y, přičemž neexistuje jiná horní závora $z \neq s$, pro kterou by bylo $z \preceq s$.

Dvojice prvků obecně žádné supremum mít nemusí: předně nemusí mít ani žádnou horní závoru (jako prvky $8, 18$ na obr. 5b), nebo naopak může množina horních závor mít více minimálních prvků, ze kterých pak, jak víme, žádný nebude nejmenší. Tento případ nastává u prvků $4, 6$ na obr. 5d, které mají horní závory $24, 36$ a 72, přičemž 24 a 36 jsou minimální prvky v této množině horních závor.

Podobně jako supremum je definováno infimum dvou prvků. *Dolní závora* prvků x, y je prvek z, pro který je $z \preceq x$ a $z \preceq y$, a *infimum* (*průsek*) prvků x, y je největší z jejich dolních závor. K pojmu infima se symetrickým způsobem vztahuje vše, co bylo řečeno o supremu.

> **Cvičení 3.6** Najděte uspořádanou množinu, ve které množina horních závor nějakých dvou prvků má přesně pět minimálních prvků.

Svaz je uspořádaná množina $(X, \preceq)$, ve které existuje supremum i infimum pro libovolnou dvojici prvků. Ve svazu můžeme na supremum a infimum pohlížet jako na binární operace (protože je zaručeno, že jejich hodnoty jsou definovány pro každou dvojici). Supremum prvků x, y zde značíme $x \vee y$, infimum jako $x \wedge y$.

Příkladem svazu, na který jsme již narazili, je množina všech podmnožin libovolné množiny (uspořádaná inkluzí). Supremum dvou množin zde odpovídá jejich sjednocení, infimum odpovídá jejich průniku.

Pojmy suprema a infima jsme definovali pomocí uspořádání. Je možné postupovat v opačném směru a z pouhé znalosti binárních operací suprema a infima na množině X rekonstruovat původní uspořádání? Následující jednoduché tvrzení ukazuje, že to možné je (a dokonce stačí znát jenom suprema).

Tvrzení 3.7 *Pro libovolné dva prvky a, b svazu $(X, \preceq)$ platí*

$$a \preceq b \quad \textit{právě když} \quad a \vee b = b \quad \textit{právě když} \quad a \wedge b = a.$$

Důkaz. Nechť $a \preceq b$. Pak b je zjevně horní závorou dvojice a, b. Dejme tomu, že pro nějakou horní závoru $z \neq b$ této dvojice platí $z \preceq b$. Z faktu, že z je horní závora, plyne $b \preceq z$. Díky antisymetričnosti máme $z = b$, což je spor. Taková závora z tedy nemůže existovat, takže z definice suprema je $a \vee b = b$. Tvrzení o infimu se dokazuje symetricky. □

Jednu polovinu minulého důkazu jsme si ušetřili poukazem na symetrii mezi pojmy supremum a infimum. Jde o speciální případ tzv. principu duality, který ukážeme dále.

> **Cvičení 3.8** Dokažte, že inverzní relace $\preceq^{-1}$ k libovolnému uspořádání $\preceq$ je opět uspořádání.

Není těžké si všimnout, že Hasseův diagram uspořádání $\preceq^{-1}$ ze cvičení 3.8 získáme, když otočíme Hasseův diagram uspořádání $\preceq$ vzhůru nohama. Při této změně se suprema mění na infima a naopak. (Přesněji, supremum prvků a,b vzhledem k uspořádání $\preceq$ je jejich infimem vzhledem k uspořádání $\preceq^{-1}$.) Z toho snadno dostáváme následující *princip duality*:

> Pokud v nějakém tvrzení, které platí ve všech svazech, důsledně zaměníme symboly $\vee$ a $\wedge$ a otočíme směr všech nerovností, dostaneme opět tvrzení platné ve všech svazech.

Věta 3.9 ?? *Pro operaci $\vee$ v libovolném svazu $(X, \preceq)$ platí:*

(i) je asociativní,

(ii) je komutativní,

(iii) $a \vee a = a$ pro $a \in X$,

(iv) $a \vee (b \wedge a) = a$ pro $a, b \in X$.

Důkaz. Část (ii) (komutativita operace $\vee$) plyne přímo z definice suprema. Část (iii) plyne z faktu, že $a \preceq a$ (reflexivita) a z tvrzení 3.7. V části (iv) víme, že $b \wedge a \preceq a$ (protože $b \wedge a$ je dolní závora dvojice a, b), takže z tvrzení 3.7 plyne, že $a \vee (b \wedge a) = a$.

Zbývá část (i), tedy asociativita operace $\vee$. Mějme prvky $a, b, c \in X$. Chceme ukázat, že $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$. Označme levou stranu této rovnice jako ℓ. Z definice víme, že ℓ je horní závorou pro prvky a, $b \vee c$, přičemž druhý z těchto prvků je zase horní závorou pro prvky b, c. Odtud určitě $a, b, c \preceq \ell$. Vzhledem k tomu, že $a \vee b$ je *nejmenší* horní závorou prvků a, b, musí být $a \vee b \preceq \ell$. Pak ovšem ℓ je horní závorou dvojice $(a \vee b), c$, takže pro supremum této dvojice máme

$$(a \vee b) \vee c \preceq \ell = a \vee (b \vee c).$$

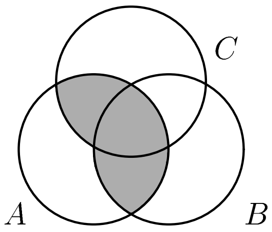
Zcela obdobně lze ukázat opačnou nerovnost $a \vee (b \vee c) \preceq (a \vee b) \vee c$. Z antisymetričnosti pak dostaneme požadovanou rovnost. $\square$

Podobné vlastnosti jako operace $\vee$ má díky principu duality samozřejmě i operace $\wedge$ (speciálně je asociativní a komutativní).

Vlastnosti (i) a (ii) v předchozí větě jsou stejné, jako má operace sčítání a násobení v tělese. Může nás napadnout otázka, zda tato analogie jde ještě dál, například zda platí *distributivita* mezi operacemi $\wedge$ a $\vee$, tedy

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{pro libovolné prvky } a, b, c. \tag{1}$$

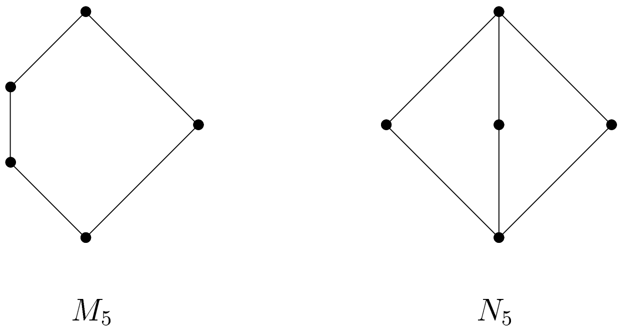
Každý svaz, ve kterém platí (1), se nazývá *distributivní*. Příkladem takového svazu je svaz podmnožin libovolné množiny distributivita platí. Jsou-li totiž A, B, C nějaké množiny, pak z obr. 6 je vidět, že $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.



Obrázek 6: Distributivita u množin: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Na druhou stranu obr. 7 ukazuje dva příklady svazů, které distributivní nejsou.

Cvičení 3.10 Ověřte, že uspořádané množiny M_5, N_5 na obr. 7 jsou svazy, a ukažte, že v nich neplatí rovnost (1).



Obrázek 7: Nedistributivní svazy.

Dá se dokonce ukázat, že svazy M_5 a N_5 z obr. 7 jsou v jistém smyslu obsaženy v každém nedistributivním svazu. Abychom mohli tento fakt precizně vyjádřit, potřebujeme ještě jednuu definici.

Podsvazem svazu $(X, \preceq)$ je libovolný svaz $(Y, \leq)$ takový, že

(1) $Y \subseteq X$ a uspořádání $\leq$ je *zúžením* uspořádání $\preceq$ na množinu Y (jinými slovy platí $a \leq b$, právě když $a \preceq b$ a prvky a, b leží v množině Y),

(2) suprema (infima) ve svazu $(Y, \leq)$ se shodují se supremy (infimy) ve svazu $(X, \preceq)$.

Nyní můžeme vyslovit charakterizaci distributivních svazů. Větu dokazovat nebudeme. Všimněme si ale, že jedna z implikací je triviální.

Věta 3.11 *Svaz je distributivní, právě když neobsahuje ani jeden ze svazů M_5, N_5 jako podsvaz.* □

Fakt, že tyto 'zakázané podsvazy' jsou symetrické podle vodorovné osy, naznačuje, že při otočení distributivního svazu 'vzhůru nohama' bychom mohli opět dostat distributivní svaz. V trochu jiné formulaci to potvrzuje následující věta.

Věta 3.12 *V libovolném distributivním svazu $(X, \preceq)$ platí také duální forma distributivity:*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

pro libovolné $x, y, z \in X$.

Důkaz. Položme v definici (normální) distributivity $a = x \vee y$, $b = x$, $c = z$. Dostaneme, že $p := (x \vee y) \wedge (x \vee z) = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z]$. Podle duální verze věty **??**d upravíme levou z hranatých závorek na $(x \vee y) \wedge x = x$. V pravé závorce ještě jednou uplatníme distributivitu a dostaneme $p = x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)]$. To lze s použitím asociativity upravit na $[x \vee (x \wedge z)] \vee (y \wedge z)$ a z věty **??**d je konečně $p = x \vee (y \wedge z)$. □

Musí ve svazu vždy existovat největší prvek? Příklad množiny reálných čísel s běžným uspořádáním ukazuje, že nikoli. Platí však následující věta:

Věta 3.13 *V konečném svazu vždy existuje největší a nejmenší prvek.*

Důkaz. Očíslujme prvky uvažovaného svazu $(X, \preceq)$ jako $X = \{ a_1, \ldots, a_n \}$ a definujme posloupnost $s_1, \ldots, s_n$ induktivně předpisem $s_i = s_{i-1} \vee a_i$ pro $i = 2, \ldots, n$, přičemž $s_1 = a_1$. Tato posloupnost 'roste', přesněji $s_i \preceq s_{i+1}$ pro každé $i = 1, \ldots, n-1$. Navíc je z definice $a_i \preceq s_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ (s_i je totiž horní závorou pro a_i a s_{i-1}). Pro prvek s_n musí tím pádem být $a_i \preceq s_n$, kde $i = 1, \ldots, n$, a je tedy největším prvkem množiny X. Nejmenší prvek najdeme podobně. □

Implikaci v předcházející větě není možné obrátit: uspořádaná množina s největším a nejmenším prvkem ještě zdaleka nemusí být svaz. Příkladem je množina z obr. 5d.

Největší prvek svazu (existuje-li) se obvykle značí jako 1, nejmenší prvek jako 0. Následující tvrzení ukazuje, že se jedná o neutrální prvky operací $\wedge$ resp. $\vee$.

Tvrzení 3.14 *Má-li svaz* $(X, \preceq)$ *prvky* 0 *a* 1*, pak pro každé* $x \in X$ *platí*

$$x \wedge 1 = x \quad a \quad x \vee 0 = x.$$

Důkaz. Prvek 1 je největší, takže pro libovolné $x \in X$ máme $x \preceq 1$. Podle tvrzení 3.7 je $x \wedge 1 = x$. Podobně pro operaci $\vee$ a prvek 0. $\square$

Svaz podmnožin libovolné množiny A největší a nejmenší prvek má. Největším prvkem je celá množina A, nejmenším pak prázdná množina $\emptyset$.