Kapitola 10

Toky v sítích

10.1 Síť s jedním zdrojem a jedním stokem

Definice 10.1 *Síť s jedním zdrojem a jedním stokem* je orientovaný graf $G = (V, E)$ spolu s funkcí $r : E \to (0, \infty)$, přičemž v grafu G jsou určeny dva různé vrcholy z (*zdroj*) a s (*stok*). Funkce r určuje *propustnost* $r(e)$ každé hrany e.

Definice 10.2 Pro množinu vrcholů $X \subset V$ budeme symbolem X^+ označovat množinu všech hran, které končí v množině X, ale začínají mimo ni. Podobně

$$X^- = \{ vw \in E : v \in X, w \notin X \}.$$

Je-li $v \in V$, pak místo $\{ v \}^+, \{ v \}^-$ budeme psát prostě v^+, v^-.

Všimněme si, že tato definice se hodí k definici vstupního resp. výstupního stupně: například $d^+(v) = |v^+|$.

Definice 10.3 *Tok* v síti G je funkce $x : E \to [0, \infty)$ s následujícími vlastnostmi:

(i) pro každou hranu $e \in E$ platí $0 \leq x(e) \leq r(e)$,

(ii) pro každý vrchol $v \in V$ kromě zdroje a stoku platí

$$\sum_{e \in v^-} x(e) = \sum_{e \in v^+} x(e).$$

Pro libovolnou množinu hran $B \subset E$ budeme pro stručnost psát

$$x(B) = \sum_{e \in B} x(e).$$

Rovnost (ii) lze tedy zkráceně zapsat $x(v^-) = x(v^+)$ pro $x \neq z, s$. *Velikost* $|x|$ toku x je definována jako rozdíl

$$|x| = x(z^-) - x(z^+).$$

Definice 10.4 *Řez* v síti G je každá množina hran ve tvaru R^-, kde R je nějaká množina vrcholů obsahující zdroj a neobsahující stok. *Propustnost* $r(R^-)$ řezu R^- je součet $\sum_{e\in R^-} r(e)$.

Tvrzení 10.5 *Nechť x je tok v síti G a R je množina vrcholů s vlastností $s \notin R \ni z$. Potom platí*

$$|x| = x(R^-) - x(R^+).$$

Důkaz. V součtu

$$\Delta = \sum_{v\in R}\Big(x(v^-) - x(v^+)\Big).$$

sčítáme podle definice toku samé nuly, s výjimkou případu, kdy vrchol v je zdroj. Rozdíl $x(z^-) - x(z^+)$ je roven velikosti toku x. Dostáváme $\Delta = |x|$.

Na druhou stranu rozepišme každé z čísel $x(v^-)$ jako součet hodnot $x(e)$ přes $e \in v^+$, a podobně naložme s čísly $x(v^+)$. Každá hrana e, která má v R oba vrcholy, se ve výsledném výrazu pro Δ objeví dvakrát, pokaždé s jiným znaménkem u $x(e)$. Pokud hrana e v množině R pouze končí (začíná), pak v rozepsaném výrazu pro Δ bude $x(e)$ pouze se znaménkem plus (resp. minus). Platí tedy

$$\Delta = x(R^-) - x(R^+).$$

Dáme-li obě tyto rovnosti dohromady, dostaneme požadované tvrzení. □

Důsledek 10.6 *Velikost libovolného toku x v síti G je nejvýše rovna propustnosti libovolného řezu R^- v této síti:*

$$|x| \leq r(R^-).$$

Důkaz. Podle předchozího tvrzení je $|x| = x(R^-) - x(R^+) \leq x(R^-)$. Přitom $x(R^-) \leq r(R^-)$, takže $|x| \leq r(R^-)$. □

Definice 10.7 Tok x v síti G je *maximální*, pokud velikost každého toku v G je nejvýše $|x|$. Podobně řez R je *minimální*, nemá-li žádný řez menší propustnost.

[**Hledáme maximální tok; příklad, že nestačí přidávat po 1 po orietovaných cestách.**]

Než vyslovíme Ford–Fulkersonovu větu o maximálním toku, která v této oblasti hraje klíčovou roli, zavedeme ještě několik pojmů.

Definice 10.8 Nechť u, v jsou vrcholy sítě G. *Polocesta* z u do w je posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k = w$, kde v_i jsou navzájem různé vrcholy, e_i jsou hrany a pro každé $i = 1, \ldots, k$ platí buď $e_i = v_{i-1}v_i$ (pak jde o *souhlasnou* hranu dané polocesty) nebo $e_i = v_iv_{i-1}$ (*nesouhlasná* hrana).

Nechť x je tok v síti G. *Rezerva* polocesty P je nezáporné číslo

$$\Theta(P) = \min\Big(\{\, r(e) - x(e) : e \text{ je souhlasná} \,\} \cup \{\, x(e) : e \text{ je nesouhlasná} \,\}\Big).$$

Polocesta je *rezervní*, pokud má kladnou rezervu.

Řekneme-li, že hrana e je *nasycená*, pokud $x(e) < r(e)$, a že je *nulová*, pokud $x(e) = 0$, pak polocesta je zjevně rezervní, právě když neobsahuje žádnou souhlasnou nasycenou ani nesouhlasnou nulovou hranu.

Cvičení 10.9 V čem je podstatný rozdíl mezi polocestou podle naší definice a cestou v symetrizaci grafu G?

Na význam této definice ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 10.10 *Pokud existuje rezervní polocesta ze z do s vzhledem k toku x, pak x není maximální.*

Důkaz. Nechť $\Theta > 0$ je rezerva polocesty P ze z do s. Upravíme hodnoty toku x na hranách cesty P: na souhlasných hranách přidáme Θ a na nesouhlasných Θ ubereme. Výsledkem je opět tok, jak se snadno přesvědčíme ověřením dvou podmínek z definice toku. Velikost nového toku je ovšem $|x| + \Theta$, takže x není maximální. □

Věta 10.11 (Ford–Fulkerson) *Velikost maximálního toku v síti G je rovna propustnosti minimálního řezu v této síti.*

Důkaz. Nechť x je maximální tok. Nechť M je množina všech vrcholů w, pro které existuje rezervní polocesta ze z do w. Jistě $z \in M$ (díky 'prázdné' polocestě) a $s \notin M$ (jinak by podle tvrzení 10.10 x nemohl být maximální).

Každá hrana $e \in M^-$ je nutně nasycená, jinak bychom museli do množiny M přidat její koncový vrchol. Podobně každá hrana z M^+ je nulová. Dostáváme, že $x(M^-) = r(M^-)$ a $x(M^+) = 0$. Podle tvrzení 10.5 je

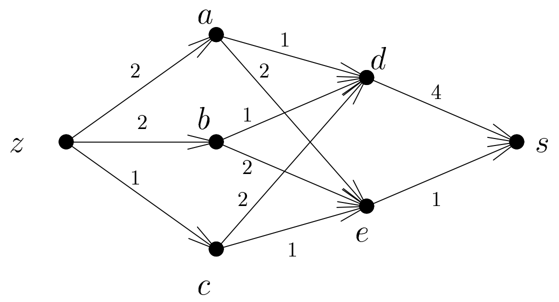
$$|x| = x(M^-) - x(M^+) = r(M^-).$$

Našli jsme tedy řez M^-, jehož propustnost je rovna velikosti toku x. Podle důsledku 10.6 musí jít o minimální řez. □

Všimněme si, že jsme vlastně dokázali opačnou implikaci k tvrzení 10.10. Neexistuje-li žádná rezervní polocesta ze zdroje do stoku, potom množina M (definovaná jako v důkazu věty 10.11) neobsahuje stok a tedy $|x| = r(M^-)$. Podle tvrzení **??** je x nutně maximální tok.

10.2 Ford–Fulkersonův algoritmus

Důkaz věty 10.11 napovídá, jak lze efektivně ověřit, zda je daný tok x maximální. Stačí zkonstruovat množinu M všech vrcholů dosažitelných ze zdroje po rezervní polocestě. Pokud $s \in M$, nejde o maximální tok a nalezená polocesta ze z do s umožňuje přejít k toku o větší velikosti.



Obrázek 10.1: Příklad ilustrující Ford–Fulkersonův algoritmus.

Pokud na druhou stranu $s \notin M$, pak jsme našli řez M^- s propustností $|x|$. Podle tvrzení **??** je tento řez důkazem, že x je maximální tok.

Na představě rezervní polocesty je založen nejjednodušší algoritmus pro hledání maximálního toku, tzv. *Ford–Fulkersonův algoritmus*:

(1) Jako výchozí tok x zvolme nulový tok: $x(e) := 0$ pro každou hranu e.

(2) Jestliže v grafu G existuje nějaká rezervní polocesta P ze z do s, upravme podle ní tok x:

$$x(e) := \begin{cases} x(e) + \Theta & \text{pokud } e \text{ je souhlasná hrana polocesty } P, \\ x(e) - \Theta & \text{pokud } e \text{ je nesouhlasná hrana polocesty } P, \\ x(e) & \text{pokud } e \text{ neleží na } P. \end{cases}$$

a pokračujme bodem (2).

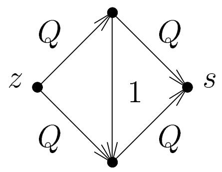
(3) V případě, že rezervní polocesta neexistuje, je x maximální.

Způsob hledání rezervní polocesty není v tomto algoritmu specifikován — můžeme prostě vzít první, kterou najdeme. [**Algoritmus po konečném počtu kroků skončí.**]

Podstatnou slabinou tohoto algoritmu je, že doba jeho provádění závisí nejen na počtu vrcholů a hran sítě G (což je přirozené), ale také na propustnostech hran. Uvažme síť na obr. 10.2, ve které Q je nějaké velké číslo.

Pokud v každém kroku algoritmu nešťastnou náhodou použijeme rezervní polocestu, která prochází svislou hranou, změní se velikost toku vždy jen o 1, takže budeme potřebovat $2Q$ kroků.

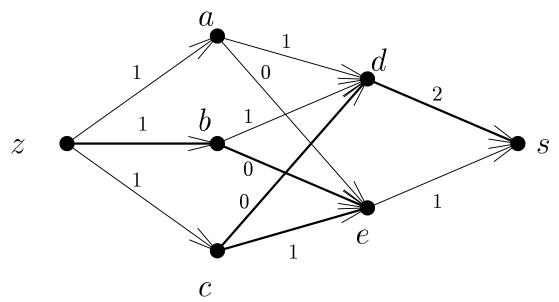
Příklad 10.12 Najděme maximální tok v síti na obr. 10.1. Počáteční nulový tok snadno zvětšíme podél několika orientovaných cest ze z do s. Dejme tomu, že jsme přidali hodnotu 1 na cestách cesty *zads*, *zces* a *zbds* a dostali jsme tok na obr. 10.3(a). Nyní už žádná orientovaná cesta ze z do s s nenulovou rezervou neexistuje. Můžeme se tedy domnívat, že jsme našli maximální tok. Pokud ale



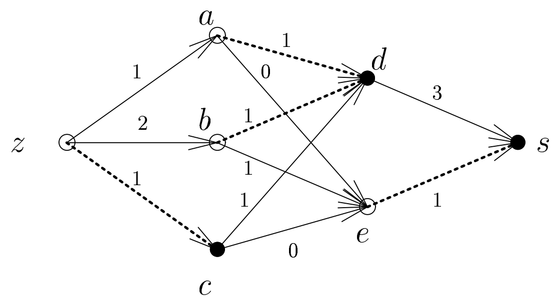
Obrázek 10.2: Doba provádění Ford–Fulkersonova algoritmu může záviset na propustnostech.

sestrojíme množinu M jako v důkazu Ford–Fulkersonovy věty, zjistíme, že $s \in M$, a to kvůli polocestě *zbecds* s rezervou 1 (vyznačena tučně). Úpravou toku podél této polocesty dostaneme tok na obr. 10.3(b). Provedeme-li opět kontrolu maximality (konstrukci množiny M), zjistíme, že tentokrát $s \notin M$, takže tok je již skutečně maximální. Příslušný řez je označen tečkovaně.

(a)



(b)



Obrázek 10.3: Postup hledání maximálního toku: (a) první pokus s vyznačenou rezervní polocestou, (b) výsledný maximální tok s vyznačenou množinou M (prázdné kroužky) a příslušným řezem (tečkovaně).

10.3 Edmonds–Karpův algoritmus

Uvedenou nesnáz řeší modifikace Ford–Fulkersonova algoritmu, známá jako *Edmonds–Karpův algoritmus.* Myšlenka je jednoduchá: zvolíme vždy nejkratší rezervní polocestu ze z do s (tj. takovou, která má minimální počet hran). Dá se ukázat (my to dělat nebudeme), že v takovém případě je počet opakování kroku (2) algoritmu nezávislý na propustnostech a činí zhruba mn, kde $m = |E|$ a $n = |V|$.

Jak ale zmíněnou nejkratší rezervní polocestu najít? Například tzv. *prohledáváním do šířky.* Popíšeme jednu z iterací kroku (2). Dejme tomu, že máme nějaký tok x a hledáme nejkratší rezervní polocestu ze z do s.

(a) Nechť T je strom na jediném vrcholu z. Dále mějme seznam vrcholů L s jedinou položkou z. Všechny vrcholy sítě G kromě zdroje jsou na začátku *neoznačené*, zdroj je *označený.*

(b) Je-li $L \neq \emptyset$, pak nechť v je první vrchol seznamu L.

- Je-li $v = s$, algoritmus končí. Jednoznačně určená polocesta spojující z a s ve stromu T je hledaná nejkratší polocesta. Upravíme podle ní tok x jako ve Ford–Fulkersonově algoritmu.
- Jinak označíme všechny neoznačené sousedy w vrcholu v, pro něž vw je nenasycená hrana nebo wv je nenulová hrana, ve stromu T je připojíme hranami k v, a přidáme je na konec seznamu L. Vyřadíme vrchol v ze seznamu L a pokračujeme bodem (b).

(c) V případě $L = \emptyset$ uzavřeme, že neexistuje rezervní polocesta spojující z a s. Tok x je tedy maximální.