1 Relace

Relace patří k základním matematickým objektům. Popisují vztahy mezi prvky daných množin. Mějme 2 množiny X,Y a představme si, že každý prvek $x \in X$ může (a nemusí) být ve 'vztahu' R s libovolným počtem prvků $y \in Y$. Na onen vztah nejsou kladeny žádné další podmínky.

Přirozeným způsobem, jak takový vztah popsat, je vyjmenovat všechny dvojice (x, y) prvků $x \in X$ a $y \in Y$, které spolu jsou ve vztahu R. Připomeneme-li si, že kartézský součin $X \times Y$ je právě množina všech uspořádaných dvojic s prvním prvkem z množiny X a druhým prvkem z množiny Y, dostáváme se k následující definici pojmu relace:

Definice 1.1 *Relace z množiny X do množiny Y* je libovolná podmnožina R kartézského součinu $X \times Y$.

Takové relaci se říká *binární*, protože určuje vztah mezi dvojicemi objektů. Definici lze snadno zobecnit na *n-ární relace* (vztahy mezi n-ticemi prvků), ale nás zajímá především binární případ.

Je-li dána relace R z množiny X do množiny Y, pak pro každou dvojici $(x, y) \in R$ také píšeme $x\,R\,y$ (a čteme 'prvek x je v relaci R s prvkem y'). Daný prvek $x \in X$ ovšem nemusí být v relaci R s žádným prvkem množiny Y (v extrémním případě může být relace R třeba prázdná). Proto definujeme *levý obor* relace R jako

$$L(R) = \{\, x \in X \mid \text{existuje nějaké } y \in Y \text{ tak, že } x\,R\,y \,\}$$

a podobně *pravý obor*

$$P(R) = \{\, y \in Y \mid \text{existuje nějaké } x \in X \text{ tak, že } x\,R\,y \,\}$$

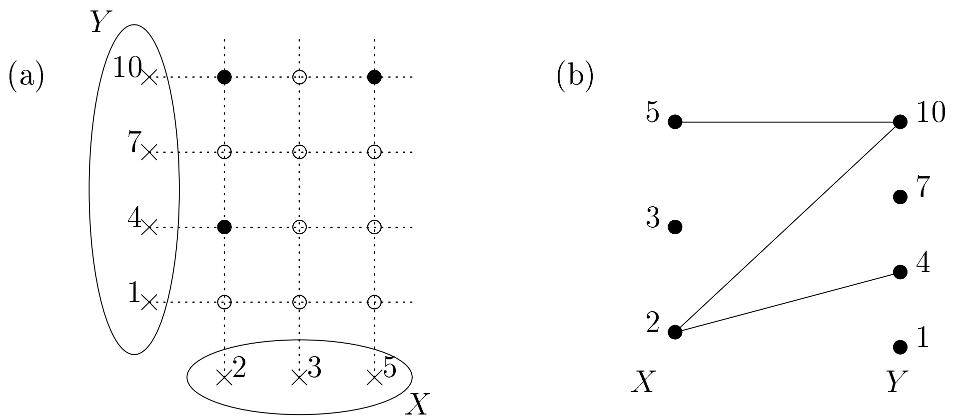
Příklad 1.2 Vezměme si například množiny $X = \{\, 2, 3, 5 \,\}$ a $Y = \{\, 1, 4, 7, 10 \,\}$. Jedna z relací z množiny X do množiny Y pak vypadá třeba takto:

$$R = \{\, (2, 4), (2, 10), (5, 10) \,\}.$$

Relace R má shodou okolností dosti přirozený popis; platí totiž, že x je v relaci s y, právě když x dělí y. To ale vůbec není podmínkou: stejně tak je relací z X do Y třeba množina $\{\, (2, 4), (3, 7), (5, 1) \,\}$, u které žádný takový popis asi nenajdeme.

1.1 Znázornění relací

Relaci R z minulého příkladu můžeme znázornit několika užitečnými způsoby. Na obr. 1a je znázorněn kartézský součin $X \times Y$, v němž jsou zvýrazněny prvky relace R. Na obr. 1b pak jednotlivým prvkům množin X a Y odpovídají body, přičemž množina X je zobrazena vlevo a množina Y vpravo. Dva body jsou spojeny čarou, pokud jsou odpovídající prvky v relaci R. Relace R je tak znázorněna v podobě *grafu*, což je pojem, kterým se budeme zabývat v pozdějších přednáškách.



Obrázek 1: Dva způsoby zobrazení relace: (a) jako podmnožina kartézského součinu, (b) jako graf.

Otázka 1.3 Jak z obr. 1a a 1b poznáme levý a pravý obor relace R?

Otázka 1.4 Nechť R a S jsou relace z množiny X do množiny Y. Řekneme, že relace R *implikuje* relaci S, platí-li

$$x\,R\,y \Rightarrow x\,S\,y$$

pro každé $x \in X$ a $y \in Y$. Co to znamená o relacích R a S jakožto o množinách uspořádaných dvojic?

1.2 Skládání relací

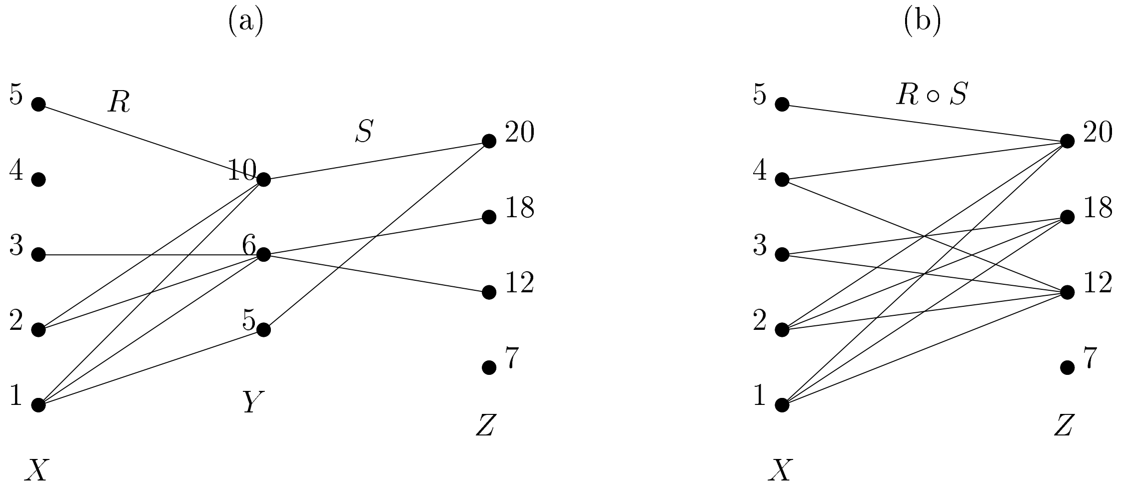
Za chvíli uvidíme, že zobrazení (funkce), jak je známe z analýzy, jsou speciálním případem relací. Následující definice skládání relací je zobecněním představy skládání funkcí.

Definice 1.5 Nechť R je relace z množiny X do množiny Y a S je relace z množiny Y do množiny Z. Pak *složení relací R a S* je relace $R \circ S \subset X \times Z$ z množiny X do množiny Z, definovaná takto:

$$(x,z) \in R \circ S, \text{ právě když existuje } y \in Y \text{ tak, že } x\,R\,y \text{ a } y\,S\,z,$$

kde $x \in X$ a $z \in Z$. Všimněme si, že složení relací R,S je definováno jen v případě, že relace R 'končí' v množině, kde S 'začíná'.

Podívejme se na konkrétní příklad. Nechť $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{5,6,10\}$ a $Z = \{7,12,18,20\}$, a definujme relace $R \subset X \times Y$ a $S \subset Y \times Z$ opět pomocí dělitelnosti (tedy například pro $x \in X$ a $y \in Y$ bude $(x,y) \in R$ pokud x dělí y).



Obrázek 2: (a) Relace R a S, (b) jejich složení.

Znázorníme-li relace R a S 'jako grafy', tj. podobně jako na obr. 1b, dostaneme situaci na obr. 2a.

Z definice skládání plyne, že prvky $x \in X$ a $z \in Z$ budou v relaci $R \circ S$, pokud se z x do z dá přejít 'po spojnicích' přes nějaký prvek $y \in Y$. Ověřte, že $R \circ S$ vypadá jako na obr. 2b.

V grafovém znázornění relace je průhledný i další pojem: inverzní relace.

Definice 1.6 *Relace inverzní* k relaci $R \subset X \times Y$ je relace $R^{-1} \subset Y \times X$, definovaná vztahem

$$y\, R^{-1}\, x \text{ právě když } x\, R\, y$$

pro $x \in X, y \in Y$.

V grafovém znázornění se přechod k inverzní relaci projeví zrcadlovým otočením obrázku podle svislé osy. Jak tomu bude v kartézském znázornění?

Vezměme například relaci S z obr. 2a. Relace inverzní k S bude

$$S^{-1} = \{\, (20,5), (12,6), (18,6), (20,10) \,\}$$

a jedná se o relaci z množiny Z do množiny Y.

Nechť je dána množina X. Místo 'relace z X do X' mluvíme prostě o *relaci na množině* X. Všimněme si, že pro každé dvě relace na X je definováno jejich složení. Význačným příkladem relace na množině X je *identická relace*

$$E_X = \{\, (x,x) \mid x \in X \,\}.$$

Otázka 1.7 Jak vypadá relace E_X ve znázorněních z obr. 1?

Otázka 1.8 Je-li R relace na X, jak vypadá složení $R \circ E_X$ a $E_X \circ R$?

Co se stane, složíme-li relaci $R \subset X \times Y$ s relací k ní inverzní? Zjevně $R \circ R^{-1}$ je relace na množině X a lákavá hypotéza je, že je rovna identické relaci E_X. To ale není pravda, jak ukazuje třeba prázdná relace $R = \emptyset$, pro kterou je $R \circ R^{-1}$ rovněž prázdná. Obecně neplatí ani jedna z inkluzí mezi E_X a $R \circ R^{-1}$. Podobně je tomu u opačného pořadí skládání, totiž pro relace $R^{-1} \circ R$ a E_Y.

Záleží u skládání operací na pořadí? Obecně samozřejmě ano — pokud R je relace z X do Y, a S je relace z Y do Z, pak $R \circ S$ je dobře definovaná relace, zatímco $S \circ R$ definována není.

Ovšem pokud $R \circ S$ jsou relace na množině X, pak tento problém nemůže nastat. Ani tam ale nemusí být $R \circ S = S \circ R$. Důkazem je tato situace: množina X je dvouprvková, $X = \{ a, b \}$. Relace $R \subset X \times X$ sestává z jediné dvojice (a, a), zatímco $S = \{ (a, b) \}$. Pak platí $R \circ S = \{ (a, b) \}$, zatímco $S \circ R$ je prázdná.

Dalším příkladem je třeba relace $T = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3) \}$ na množině $\{ 1, 2, 3 \}$, pro kterou platí $T \circ T^{-1} \neq T^{-1} \circ T$. (Ověřte.)

Kolik vlastně je různých relací z množiny X do množiny Y? Dejme tomu, že $|X| = m$ (tak značíme velikost množiny X) a $|Y| = n$. Součin $X \times Y$ má mn prvků, a relací z X do Y je tolik, kolik podmnožin má tento součin. Vzhledem k tomu, že k-prvková množina má 2^k podmnožin, činí hledaný počet relací přesně 2^{mn}.

Třebaže u skládání relací záleží na jejich pořadí (není to tedy *komutativní* operace), jednou pěknou vlastností nás skládání překvapí. Je totiž *asociativní*, což znamená, že nezáleží na způsobu, jakým relace uzávorkujeme. Přesněji to vyjadřuje následující věta.

Věta 1.9 (O asociativitě skládání relací) *Nechť $R \subset X \times Y$, $S \subset Y \times Z$ a $T \subset Z \times W$ jsou relace. Potom*

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

Důkaz. Dejme tomu, že $x \in X$ a $w \in W$ jsou spolu v relaci $R \circ (S \circ T)$. Podle definice složení relací R a $S \circ T$ to znamená, že existuje $y \in Y$ tak, že $x\,R\,y$ a $y\,(S \circ T)\,w$. Opět z definice složení relací S a T existuje $z \in Z$ tak, že $y\,S\,z$ a $z\,T\,w$.

Jinak řečeno, pokud $x\,(R \circ (S \circ T))\,w$, pak existují $y \in Y$ a $z \in Z$ tak, že $x\,R\,y\,S\,z\,T\,w$. A tato implikace platí i obráceně, což plyne přímo z definice skládání.

Stejně se dokáže, že $x\,((R \circ S) \circ T)\,w$, právě když existují $y \in Y$ a $z \in Z$ tak, že $x\,R\,y\,S\,z\,T\,w$. To ovšem znamená, že platí $x\,(R \circ (S \circ T))\,w$ právě když platí $x\,((R \circ S) \circ T)\,w$, protože obě tato tvrzení jsou ekvivalentní téže podmínce. Z toho už vyplývá dokazovaná věta. $\square$

K lepšímu pochopení důkazu může pomoci, představíme-li si relace R, S, T v grafovém znázornění. Prvek $x \in X$ a $w \in W$ budou v relaci $R \circ (S \circ T)$ právě tehdy, když se z x do w dá v našem obrázku 'přejít' přes nějaký prvek množiny Y a prvek množiny Z. Totéž ale platí pro tu druhou ze zkoumaných složených relací, takže musí být totožné.

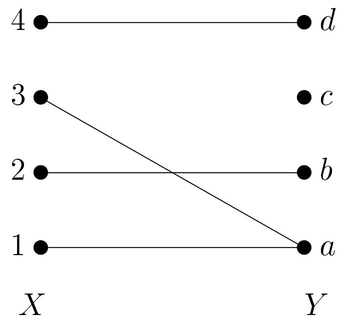
1.3 Zobrazení

Zobrazení je speciálním případem relace.

Definice 1.10 *Zobrazení* z množiny X do množiny Y je relace $f \subset X \times Y$, pro kterou platí, že pro každý prvek $x \in X$ existuje *právě jeden* prvek $y \in Y$ tak, že $(x, y) \in f$. Skutečnost, že f je zobrazením z X do Y, zapisujeme jako $f : X \to Y$.

Pro $x \in X$ nazýváme ono jediné y *hodnotou* zobrazení f v bodě x a píšeme $f(x) = y$. Říkáme také, že prvek x je *vzorem* prvku y při zobrazení f. Nepřehlédněme, že libovolný prvek může mít více vzorů.

Například relace f z množiny $X = \{1, 2, 3, 4\}$ do množiny $Y = \{a, b, c, d\}$ na obr. 3 je zobrazením. Platí třeba $f(3) = a$ atd.



Obrázek 3: Zobrazení $f : X \to Y$.

Zobrazení mohou mít několik důležitých vlastností.

Definice 1.11 Zobrazení $f : X \to Y$ je

- *prosté*, pokud každé $y \in Y$ má nejvýše jeden vzor při zobrazení f,
- *na*, pokud každé $y \in Y$ má alespoň jeden vzor při zobrazení f,
- *bijekce*, pokud je prosté a na.

Zobrazení f z obr. 3 není ani prosté, ani na, neboť prvek c nemá vzor, zatímco a má hned dva.

Co se stane, utvoříme-li inverzní relaci k nějakému zobrazení $f : X \to Y$? Tato inverzní relace f^{-1} je vždy definována (je dokonce definována pro libovolnou relaci), ale nemusí to být zobrazení. Příkladem je třeba právě zobrazení f z obr. 3.

> **Cvičení 1.12** Ukažte, že inverzní relace f^{-1} k zobrazení $f : X \to Y$ je sama zobrazením, právě když f je bijekce.

1.4 Znázornění relací na množině X

Pro tuto chvíli opustíme relace z množiny x do množiny Y a budeme se věnovat výhradně relacím na jediné množině X. Pro takové relace máme k dispozici ještě několik typů znázornění. Vezměme si jako příklad relaci R na množině $X = \{ a, b, c, d, e, f \}$ definovanou vztahem

$$R = \{ (a, a), (f, f), (a, c), (a, e), (b, d), (b, f), (e, a), (c, e) \}.$$

U *maticového* znázornění relace R sestrojíme matici, řekněme $M(R)$, jejíž řádky (a právě tak sloupce) jednoznačně odpovídají prvkům množiny X. V matici $M(R)$ bude na řádku odpovídajícím prvku x a ve sloupci odpovídajícím prvku y jednička, pokud $x \, R \, y$, a v opačném případě tam bude nula. Pro výše uvedenou relaci R dostaneme matici

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

v níž řádky odpovídají shora dolů (a sloupce zleva doprava) prvkům $a, \ldots, f$.

Další variantou je zobrazení v podobě *orientovaného grafu*. Idea je podobná jako na obr. 1b, ovšem s tím, že nyní můžeme ušetřit jednu množinu bodů. Každý prvek množiny x bude nyní zastoupen jen jedním bodem (a ne dvěma, jako by tomu bylo na obr. 1b). Vztah $x \, R \, y$ znázorníme šipkou z bodu x do bodu y.

1.5 Vlastnosti relací

Vzhledem k obecnosti pojmu relace je přirozené, že se relace dále dělí podle toho, zda mají nebo nemají určité základní vlastnosti.

Definice 1.13 Relace R na množině X je

- *reflexívní*, pokud pro každé $x \in X$ platí $x \, R \, x$,
- *symetrická*, pokud pro každé $x, y \in X$,

$$x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x,$$

- *slabě antisymetrická*, pokud pro každé $x, y \in X$,

$$x \, R \, y \;\text{ a }\; y \, R \, x \Rightarrow x = y,$$

- *tranzitivní*, pokud pro každé $x, y, z \in X$,

$$x\,R\,y \;\text{ a }\; y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z.$$

Všechny tyto vlastnosti mají srozumitelnou interpretaci v jednotlivých znázorněních relace R. Uvažme třeba znázornění pomocí orientovaného grafu. Reflexívní relaci poznáme podle toho, že v tomto orientovaném grafu je u každého z bodů 'smyčka', u symetrické relace má každá z čar svou dvojnici v opačném směru, atd.

Podívejme se na příklady relací na různých množinách a na to, které z uvedených vlastností tyto relace mají. Poslední 4 sloupce následující tabulky určují, zda je relace reflexívní (R), symetrická (S), slabě antisymetrická (A) či tranzitivní (T).

množina	$x\,R\,y$, pokud...	R	S	A	T
$\mathbf{R}$	$x \leq y$	+	−	+	+
$\mathbf{R}$	$x < y$	−	−	+	+
obyvatelé ČR	x je rodičem y	−	−	−	−
rovina $\mathbf{R}^2$	vzdálenost x od $y \leq 1$	+	+	−	−
přímky v $\mathbf{R}^2$	x je rovnoběžná s y	+	+	−	+
prostor matic $\mathbf{R}^{3\times 3}$	x je podobná y	+	+	−	+
přirozená čísla $\mathbf{N}$	x dělí y	+	−	+	+
nenulová celá čísla $\mathbf{Z} - \{\,0\,\}$	x dělí y	+	−	−	+

1.6 Ekvivalence a rozklady

Význačné místo mezi relacemi mají ekvivalence.

Definice 1.14 *Ekvivalence na množině* X je relace R na množině X, která je reflexívní, symetrická a tranzitivní.

Relacím, které jsou pouze reflexívní a symetrické (a nemusí být tranzitivní) se někdy říká *tolerance*. Příkladem tolerance, která není ekvivalencí, je relace R na množině všech trojic nul a jedniček, kde trojice x je v relaci R s trojicí y, pokud se liší nejvýše v jednom symbolu.

Ekvivalence úzce souvisí s pojmem rozkladu množiny.

Definice 1.15 Nechť X je množina. (Neuspořádaný) soubor podmnožin $\{X_i\}_{i\in I}$ množiny X je *rozklad* množiny X, pokud množiny X_i jsou neprázdné, navzájem disjunktní a jejich sjednocením je celá množina X. Množiny X_i nazýváme *třídy* rozkladu $\{X_i\}_{i\in I}$.

Soubor $\{\,\{\,1,3\,\},\{\,6\,\},\{\,2,4,5\,\}\,\}$ je například rozkladem množiny $X = \{\,1,2,3,4,5,6\,\}$, zatímco soubory $\{\,\{\,1,2,3\,\},\{\,1,4,5\,\},\{\,1,5,6\,\}\,\}$ a $\{\,\{\,1,2\,\},\{\,3,4,5\,\}\,\}$ nikoli. Zdůrazněme, že u rozkladu nezáleží na pořadí, ve kterém jsou jeho třídy uvedeny.

Věta 1.16 *Ekvivalence na X jednoznačně odpovídají rozkladům X.*

Důkaz. Ukážeme, jak dané ekvivalenci $\sim$ na množině X přiřadit rozklad $X/\sim$ množiny X. Pro $x \in X$ definujme *třídu prvku x* předpisem

$$[x]_\sim = \{\, y \in X \mid x \sim y \,\}.$$

Místo $[x]_\sim$ budeme psát stručněji $[x]$.

Tvrdíme, že pro $x, y \in X$ jsou třídy $[x]$, $[y]$ buď shodné nebo disjunktní. Dejme tomu, že nejsou disjunktní, tedy existuje $z \in [x] \cap [y]$.

Vezměme libovolný prvek $x' \in [x]$. Máme $x \sim x'$ a ze symetrie také $x' \sim x$. Protože $z \in [x]$, je rovněž $x \sim z$, takže z tranzitivity plyne $x' \sim z$. Konečně z faktu $z \in [y]$ dostaneme $y \sim z$, takže $z \sim y$ a z tranzitivity $x' \sim y$. Jinými slovy $x' \in [y]$. Ukázali jsme, že každý prvek x' třídy $[x]$ je rovněž prvkem třídy $[y]$. Totéž ale platí i naopak (důkaz je stejný), takže $[x] = [y]$. To jsme chtěli dokázat.

Vezmeme-li tedy soubor množin $X/\sim = \{\, [x] \,\}_{x \in X}$ (který obsahuje každou třídu pouze jednou!), dostaneme systém disjunktních podmnožin množiny x. Díky reflexivitě je každá třída neprázdná (protože $x \in [x]$) a sjednocením všech tříd je množina X. Jedná se tedy o rozklad množiny X.

Je-li naopak dán rozklad $\{\, X_i \,\}_{i \in I}$ množiny X, definujme relaci R předpisem

$$x \, R \, y, \quad \text{pokud } x \text{ a } y \text{ jsou prvky téže množiny } X_i.$$

Relace R je takřka z triviálních důvodů ekvivalencí. (Důkaz, že je skutečně reflexívní, symetrická a tranzitivní, přenecháváme čtenáři.)

K dokončení důkazu zbývá si všimnout, že pokud podle výše uvedených předpisů přiřadíme nějaké ekvivalenci $\sim$ rozklad a tomu zase ekvivalenci, dostaneme právě výchozí ekvivalenci $\sim$. Podobně je tomu, vyjdeme-li od rozkladu. Popsaná korespondence mezi rozklady a ekvivalencemi tedy opravdu představuje vzájemně jednoznačný vztah. □

Třídy rozkladu, který odpovídá ekvivalenci $\sim$, se nazývají *třídy ekvivalence* $\sim$. Pro ilustraci tohoto pojmu uvažme množinu $\mathbf{R}^{n \times n}$ všech reálných matic o rozměrech $n \times n$. Definujme na této množině relace $\approx$ a $\simeq$. Pro matice A a B bude $A \approx B$, pokud A a B mají stejnou hodnost, a $A \simeq B$, pokud jsou to podobné matice. Již jsme viděli, že obě tyto relace jsou ekvivalence. Kolik mají tříd? U relace $\approx$ je to jasné: $n+1$. Relace $\simeq$ má ale tříd nekonečně mnoho. Uvažme totiž všechny matice cI, kde c je reálné číslo a I je jednotková matice o rozměrech $n \times n$. Žádné dvě takové matice nejsou podobné, protože $P^{-1}(cI)P = c(P^{-1}P) = cI$ pro libovolnou regulární matici P. Každá třída relace $\simeq$ tedy obsahuje nejvýše jednu matici ve tvaru cI.

Třídy relace $\simeq$ jsou navíc podmnožinami tříd relace $\approx$. To plyne z faktu, že podobné matice mají stejnou hodnost.