Kapitola 5

Grafy

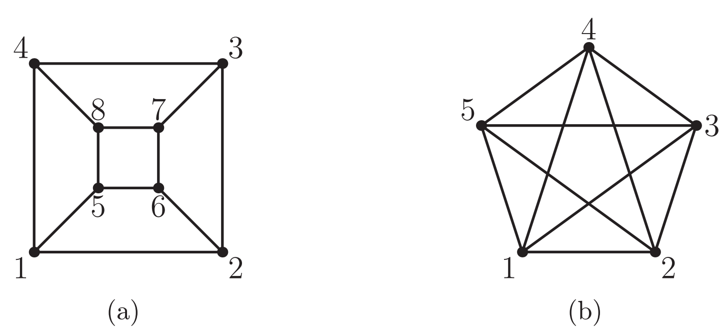
5.1 Definice

Definice 5.1 *Graf* $G = (V, E)$ je tvořen množinou *vrcholů* V a množinou *hran* $E \subset \binom{V}{2}$, kde

$$\binom{V}{2} = \{\{x, y\} : x, y \in V \text{ a } x \neq y\}$$

je množina všech neuspořádaných dvojic prvků množiny V. Vrcholy $x, y \in V$ jsou *sousední*, pokud $\{x, y\} \in E$.

V obvyklém znázornění grafu jsou vrcholy zastoupeny body v rovině a každá hrana $\{x, y\}$ čarou spojující příslušnou dvojici bodů jako na obr. 5.1.



Obrázek 5.1: Příklady grafů.

Potřebujeme-li se odkázat na množinu vrcholů resp. hran nějakého grafu G, použijeme zápis $V(G)$ resp. $E(G)$.

Všimněme si, že naše definice grafu neumožňuje, aby mezi dvěma vrcholy vedla více než jedna hrana (tzv. *násobné hrany*). Nepovoluje také tzv. *smyčky*, tj. hrany, které spojují vrchol se sebou samým. V některých situacích je vhodnější uvažovat grafy, které násobné hrany nebo smyčky mají. My se však zatím přidržíme naší jednoduché definice.

Další důležité zjištění je, že naše grafy jsou *neorientované*, jejich hrany nemají směr, protože jsou definovány jako *neuspořádané* dvojice vrcholů. Někdy budeme pro jednoduchost zapisovat hranu $\{x, y\}$ prostě jako xy; je ale třeba mít na paměti, že v neorientovaném grafu není rozdíl mezi hranami xy a yx.

Budeme také uvažovat především o *konečných* grafech, tedy takových, jejichž množina vrcholů je konečná. (Musí pak být konečná i množina hran?)

Pojem neorientovaného grafu je velice blízko pojmu symetrické relace. Je-li R antireflexívní[1] symetrická relace na množině X, pak jí lze přiřadit neorientovaný graf G s množinou vrcholů $V(G) = X$, ve kterém prvky $x, y \in X$ jsou spojeny hranou (tedy $\{x, y\} \in E(G)$), pokud $x\,R\,y$. Tato korespondence platí i opačně. Lze dokonce i odstranit požadavek antireflexivity, pokud ovšem v grafu G povolíme smyčky.

5.2 Isomorfismus a podgrafy

Podívejme se na dvojici grafů G, H, znázorněných na obr. 5.2. Jsou to rozhodně různé grafy. Nejde ani tak o to, že se liší způsob nakreslení — každý graf lze nakreslit mnoha způsoby, a nezáleží na tom, zda jsou čáry představující hrany rovné či zda se třeba kříží.

Grafy G, H jsou nicméně různé už proto, že množina vrcholů $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, zatímco $V(H) = \{a, b, c, d, e\}$. To jsou různé množiny, a proto nemůže jít o *totožné* grafy.

Je to ale jediný rozdíl? Jinými slovy, bylo by možné vrcholy grafu H ‘přeznačit’ tak, abychom dostali přesně graf G? Tato otázka směřuje k pojmu isomorfismu grafů. Čtenáře, který zná definici isomorfismu grup (kap. 2) nebo uspořádaných množin (kap. 4) by definice pro grafy neměla překvapit.

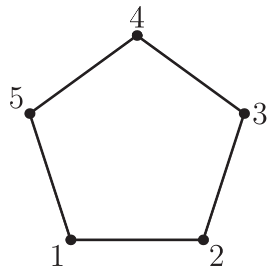
Definice 5.2 *Isomorfismus* grafů G a H je bijekce $f : V(G) \to V(H)$, pro kterou platí, že dvojice $\{x, y\}$ je hranou grafu G, právě když dvojice $\{f(x), f(y)\}$ je hranou grafu H. Grafy G, H, mezi kterými existuje isomorfismus, jsou *isomorfní* (psáno $G \simeq H$).

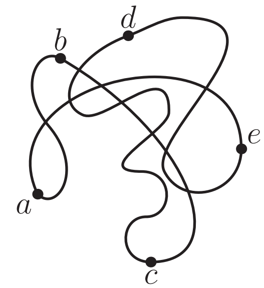
Grafy na obr. 5.2 isomorfní jsou: stačí uvážit bijekci, která prvky $1, 2, 3, 4, 5$ zobrazí po řadě na prvky a, b, c, d, e. (Ověřte podmínku v definici isomorfismu.) Tyto grafy ovšem nejsou isomorfní s žádným z grafů na obr. 5.1.

Následující definice popisuje situaci, kdy je jeden graf ‘obsažen’ v grafu jiném.

Definice 5.3 Graf H je *podgrafem* grafu G (psáno $H \subset G$), pokud $V(H) \subset V(G)$ a $E(H) \subset E(G)$.

[1] Relace R je *antireflexívní*, pokud pro žádné x neplatí $x\,R\,x$.





Obrázek 5.2: Různé, ale isomorfní grafy.

Silnější variantou pojmu podgrafu je pojem indukovaného podgrafu, u kterého vyžadujeme, aby obsahoval všechny hrany, které ve 'větším' grafu na dané množině vrcholů existují:

Definice 5.4 Graf H je *indukovaným podgrafem* grafu G, pokud $V(H) \subset V(G)$ a $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Každá množina $X \subset V(G)$ tedy určuje právě jeden indukovaný podgraf H grafu G takový, že $V(H) = X$. Tomuto podgrafu říkáme *indukovaný podgraf na množině* X.

Graf H na obr. 5.2a je například podgrafem grafu G_2 na obr. 5.1b, ale není jeho indukovaným podgrafem.

Cvičení

▶ **5.1** Dokažte, že konečné grafy s různým počtem vrcholů nemohou být isomorfní.

▶ **5.2** Dokažte, že relace 'býti isomorfní' na množině všech konečných grafů je ekvivalence.

5.3 Stupně

Definice 5.5 *Stupeň* vrcholu v grafu G je počet hran grafu G, které obsahují vrchol v. Značí se $d_G(v)$.

V grafu G_1 na obr. 5.1a je například $d_G(v) = 3$ pro každý vrchol v.

Pozorování 5.6 *V grafu G o n vrcholech je stupeň každého vrcholu nejvýše $n-1$.*

Následující zajímavá věta říká, že žádný graf nemůže mít lichý počet vrcholů lichého stupně. V angličtině se jí někdy říká *Handshaking lemma*, lemma o podání ruky, protože ji můžeme parafrázovat následovně. Dejme tomu, že na nějaké oslavě se hosté navzájem vítají podáním ruky, ne však nutně každý s každým (třeba proto, že se všichni neznají). Pak počet lidí, kteří si potřesou rukou s lichým počtem osob, bude za všech okolností sudý.

Věta 5.7 *Počet vrcholů lichého stupně je v každém grafu sudý.*

Důkaz. Nechť S je součet stupňů všech vrcholů v grafu G:

$$S = \sum_{v \in V(G)} d_G(v).$$

Každá dvojice (v, e), kde e je hrana obsahující vrchol v, k číslu S přispěje jedničkou. Každá hrana má ovšem dva konce a přispívá tak právě dvakrát. Jinak řečeno,

$$S = 2m,$$

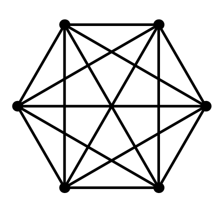
kde m je počet hran grafu G. Číslo S je tedy sudé a z toho už plyne tvrzení věty. □

5.4 Základní grafy

Ukážeme si příklady grafů, které jsou natolik zásadní, že si zasloužily vlastní jména a označení. Nechť n je přirozené číslo a označme $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Všechny dále definované grafy mají množinu vrcholů $[n]$.

Úplný graf na n vrcholech (značí se K_n) obsahuje jako hrany všechny neuspořádané dvojice prvků $[n]$, takže

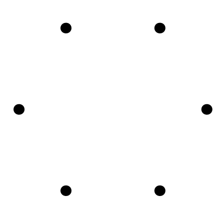
$$\begin{aligned} V(K_n) &= [n], \\ E(K_n) &= \binom{[n]}{2}. \end{aligned}$$



K_6

Diskrétní graf D_n na n vrcholech nemá žádné hrany:

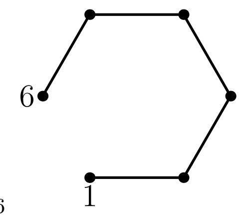
$$\begin{aligned} V(D_n) &= [n], \\ E(D_n) &= \emptyset. \end{aligned}$$



D_6

Cesta P_n na n vrcholech je definována takto:

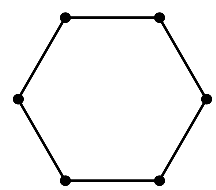
$$\begin{aligned} V(P_n) &= [n], \\ E(P_n) &= \{\{i, i+1\} : 1 \leq i < n\}. \end{aligned}$$



P_6

Kružnice C_n na n vrcholech vznikne přidáním jedné hrany:

$$\begin{aligned} V(C_n) &= [n], \\ E(C_n) &= E(P_n) \cup \{\{1, n\}\}. \end{aligned}$$



C_6

Cvičení

▶ **5.3** Buď G neorientovaný graf (bez smyček a násobných hran) na 6 vrcholech. Dokažte, že G obsahuje množinu U tří vrcholů takovou, že indukovaný podgraf na U je diskrétní nebo úplný graf. (Jde o velmi speciální případ slavné *Ramseyovy věty.*)

5.5 Sled a cesta

Definice 5.8 *Sled* (z vrcholu u do vrcholu v) v grafu G je libovolná posloupnost $(u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v)$, kde v_i jsou vrcholy grafu G a pro každé $i = 1, \ldots, k$ je $v_{i-1}v_i$ hranou grafu G. Číslo k je *délka* tohoto sledu. Říkáme, že sled *prochází* vrcholy $v_0, \ldots, v_k$ nebo že na něm tyto vrcholy *leží.*

Sled je tedy jakási procházka po grafu, při které v každém kroku přecházíme po hraně mezi sousedními vrcholy. V rámci této procházky můžeme libovolný vrchol navštívit vícekrát, můžeme dokonce i projít vícekrát po téže hraně.

Definice 5.9 *Cesta* z u do v v grafu G je sled $(u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v)$, ve kterém se každý vrchol v_i objevuje pouze jednou.

Za zmínku stojí triviální případ uvedených definic, totiž sled (u), kde $u \in V$. Jedná se o sled nulové délky z u do u, který je zároveň i cestou.

Cvičení

▶ **5.4** * (Kreslení jedním tahem) *Tah* je sled $(v_0, \ldots, v_k)$, ve kterém se mohou opakovat vrcholy, ale hrany $v_{i-1}v_i$ jsou pro různá i různé (jinými slovy, každá hrana smí být použita jen jednou). Dokažte, že v grafu G existuje tah obsahující všechny hrany, právě když G má nejvýše dva vrcholy lichého stupně.

▶ **5.5** Uvažme libovolnou cestu $(v_0, \ldots, v_k)$ v grafu G. Nechť $V' = \{v_0, \ldots, v_k\}$ je množina vrcholů, kterými tato cesta prochází, a $E' = \{v_{i-1}v_i : i = 1, \ldots, k\}$ je množina hran, které používá. Dokažte, že podgraf (V', E') grafu G je isomorfní s grafem P_{k+1} definovaným v oddílu 5.4.

5.6 Souvislost

Definice 5.10 Graf G je *souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy x, y existuje v grafu G cesta z x do y. V opačném případě je graf G *nesouvislý*.

Nechť G je graf s množinou vrcholů V. Definujme na V relaci $\sim$ předpisem

$$x \sim y, \quad \text{pokud v } G \text{ existuje cesta z } x \text{ do } y.$$

Jedná se o ekvivalenci? Určitě je to relace reflexívní (díky existenci cesty délky 0) a symetrická (protože přečteme-li cestu pozpátku, bude to podle definice zase cesta). Pokud jde o tranzitivitu, máme-li cestu z x do y a cestu z y do z, zdá se jako přirozená idea 'složením' těchto cest získat cestu z x do z. Potíž je ovšem v tom, že výsledkem složení nemusí být cesta, protože původní dvě cesty se mohou libovolně protínat. Pomůže nám však následující tvrzení.

Tvrzení 5.11 *Existuje-li v grafu G sled z vrcholu x do vrcholu y, potom $x \sim y$.*

Důkaz. Chceme ukázat, že existuje-li sled z x do y, pak existuje také cesta z x do y. Nechť tedy $(x = v_0, v_1 \ldots, v_{k-1}, v_k = y)$ je sled z x do y, a zvolme jej tak, aby k bylo nejmenší možné (tj. aby žádný sled z x do y neměl menší délku). Tvrdíme, že takovýto minimální sled (označme jej S) již musí být cestou.

Dejme tomu, že není. Pak se v něm musí nějaký vrchol opakovat, tj. pro nějaké $i \neq j$ musí být $v_i = v_j$. Pokud z našeho sledu

$$(x = v_0, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k = y)$$

vypustíme část od v_{i+1} do v_j včetně, dostaneme posloupnost

$$(x = v_0, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_k = y),$$

která je podle definice rovněž sledem (vrcholy v_i a v_{j+1} jsou totiž sousední). Navíc jde o sled z x do y, který je kratší než S. To je spor. □

Důsledek 5.12 *Relace $\sim$ na množině V je ekvivalence.*

Důkaz. Povšimli jsme si, že reflexivita a symetričnost platí z jednoduchých důvodů. Dokažme tranzitivitu. Předpokládejme $x \sim y$ a $y \sim z$. Nechť $(x = v_0, \ldots, v_k = y)$ je cesta z x do y a $(y = w_0, \ldots, w_\ell = z)$ je cesta z y do z. Potom posloupnost

$$(x = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = w_0, w_1, \ldots, w_{\ell-1}, w_\ell = z)$$

je sled z x do z (třebaže to nemusí být cesta) a podle tvrzení 5.11 je $x \sim z$. $\square$

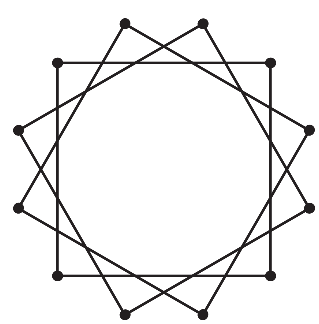
Definice 5.13 *Komponenty* grafu G jsou všechny indukované podgrafy grafu G na jednotlivých třídách ekvivalence $\sim$.

Je-li tedy K komponenta grafu G, pak $V(K)$ je jednou ze tříd ekvivalence $\sim$. Je jasné, že K je souvislý graf, protože prvky téže třídy libovolné ekvivalence jsou každý s každým v relaci. Na druhou stranu je K maximální souvislý podgraf grafu G: nejde jej rozšířit o další vrchol, nemá-li ztratit souvislost. Ze žádného vrcholu komponenty K totiž nevede hrana do žádného vrcholu mimo ni. (Dokažte.)

Cvičení

▶ **5.6** Dokažte, že graf je souvislý právě tehdy, když má jedinou komponentu.

▶ **5.7** Určete počet komponent diskrétního grafu na n vrcholech a grafu na obr. 5.3.



Obrázek 5.3: Určete počet komponent.

▶ **5.8** * Cesta P v grafu G je *nejdelší*, pokud G neobsahuje cestu s více vrcholy. Ukažte, že dvě nejdelší cesty v souvislém neorientovaném grafu G mají společný alespoň jeden vrchol.

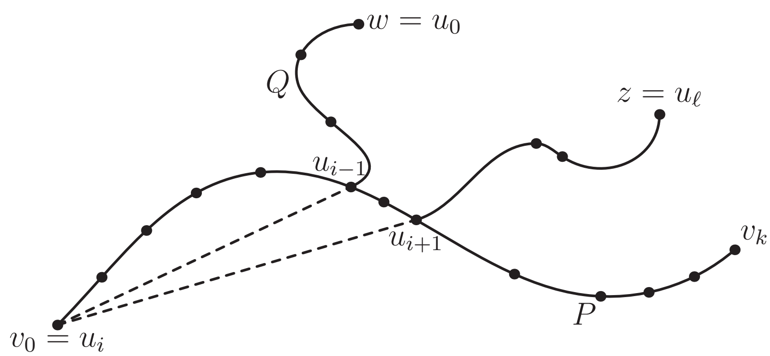
5.7 Vlastnosti souvislých grafů

Definice 5.14 Nechť v je vrchol grafu G. Graf $G - v$, vzniklý *odstraněním* vrcholu v, je definován jako indukovaný podgraf grafu G na množině $V(G) \setminus \{v\}$.

Následující věta ukazuje, že souvislý graf vždy obsahuje vrchol, jehož odstraněním neztratí souvislost. Její důkaz vtipně používá předpoklad maximality.

Věta 5.15 *Každý souvislý graf G obsahuje vrchol v s vlastností, že $G - v$ je souvislý graf.*

Důkaz. Nechť $P = (v_0, \ldots, v_k)$ je cesta maximální možné délky v grafu G. Tvrdíme, že vrchol v_0 má požadovanou vlastnost. Především všichni sousedi vrcholu v_0 musí ležet na cestě P: kdyby na ní nějaký soused z neležel, mohli bychom cestu P prodloužit o hranu v_0z a dostali bychom spor s maximalitou.



Obrázek 5.4: Ilustrace k důkazu věty 5.15.

Dejme tomu, že $G - v_0$ není souvislý graf, a zvolme dvojici vrcholů w, z, mezi nimiž v grafu $G - v_0$ neexistuje cesta. Dále zvolme cestu $Q = (w = u_0, u_1, \ldots, u_\ell = z)$ z w do z v souvislém grafu G. (Situaci ilustruje obr. 5.4, kde je cesta Q zobrazena čárkovaně a cesta P plně.) Vrchol v_0 musí ležet na cestě Q, jinak by byla cestou i v grafu $G - v_0$. Máme tedy $v_0 = u_i$ pro nějaké i. Víme, že vrchol u_{i-1} i vrchol u_{i+1} (tedy sousedi vrcholu $u_i = v_0$ na cestě Q) leží na cestě P. Pokud vyjdeme z vrcholu w, přejdeme po cestě Q do vrcholu u_{i-1}, odtud po cestě P do vrcholu u_{i+1} a dále opět po cestě Q do vrcholu z, dostaneme sled z w do z v grafu $G - v_0$ (na obrázku je vyznačen tučně). Podle tvrzení 5.11 pak v grafu $G - v_0$ existuje cesta z w do z, což je spor s naším předpokladem. $\square$

Všimněme si, že místo vrcholu v_0 jsme stejně tak mohli zvolit druhý konec cesty P, vrchol v_k. Pokud má tedy graf G více než jeden vrchol, pak existují dokonce dva vrcholy splňující podmínku věty 5.15.

Zaveďme nyní následující konvenci: bude-li z kontextu jasné, o kterém grafu se hovoří, bude n označovat *počet jeho vrcholů* a m *počet jeho hran*.

Věta 5.16 *V souvislém grafu je $m \geq n - 1$.*

Důkaz. Větu dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ se jedná o graf na jednom vrcholu, a ten je souvislý. Předpokládejme, že věta platí pro všechny grafy s méně než n vrcholy, kde $n > 1$, a dokažme ji pro libovolný graf G s n vrcholy. Nechť G má m hran. Podle věty 5.15 v grafu G existuje vrchol v, který lze odstranit bez porušení souvislosti. Graf $G - v$ má $n' = n - 1$ vrcholů a počet m' jeho hran je nejvýše $m - 1$ (do vrcholu v vedla alespoň jedna hrana). Z indukčního předpokladu je $m' \geq n' - 1$, a tedy

$$m \geq m' + 1 \geq (n' - 1) + 1 = n - 1,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Jaký je vztah souvislosti grafu a počtu jeho hran? Intuitivně je zřejmé, že se zvyšujícím se počtem hran roste šance, že graf bude souvislý. Na druhou stranu: přidáme-li k úplnému grafu na $n - 1$ vrcholech jeden izolovaný vrchol, získáme nesouvislý graf s velmi vysokým počtem hran.

Tomuto příkladu bychom se vyhnuli, kdybychom požadovali, aby každý vrchol měl dostatečně velký stupeň. Zde je extrémním (v teorii grafů se říká také extremálním) příkladem disjunktní sjednocení dvou úplných grafů na $n/2$ vrcholech; to je nesouvislé a každý vrchol má stupeň $n/2 - 1$. Tento příklad ukazuje, že následující větu není možné zlepšit:

Věta 5.17 *Jsou-li stupně všech vrcholů v grafu G alespoň $n/2$, pak je G souvislý graf.*

Důkaz. Dejme tomu, že věta neplatí a G je nesouvislý. Má tedy aspoň dvě neprázdné komponenty A,B. Alespoň jedna z těchto komponent (dejme tomu A) má nejvýše $n/2$ vrcholů, jinak by počet vrcholů v celém grafu nemohl být n. Z libovolného vrcholu v komponenty A vedou hrany jen do ostatních vrcholů této komponenty, kterých je nejvýše $n/2 - 1$. Stupeň vrcholu v tedy musí být menší než $n/2$, což je spor s naším předpokladem. □

5.8 Kružnice

Definice 5.18 *Uzavřený sled* v grafu G je sled $(v_0, \ldots, v_k)$, ve kterém platí $v_0 = v_k$. *Kružnice* v grafu G je uzavřený sled délky alespoň 3, ve kterém se vrchol v_0 objevuje právě dvakrát a každý ostatní vrchol nejvýše jednou. Číslo k je *délka* dané kružnice.

Ve cvičení 5.5 jsme viděli, že cesty délky k v grafu G lze ztotožnit s podgrafy isomorfními s grafem P_{k+1}. Podobně ztotožníme kružnice délky k v grafu G s podgrafy isomorfními s grafem C_k. Můžeme tak mluvit o množině hran nějaké kružnice v grafu G a podobně.

V minulém oddílu jsme definovali operaci odstranění vrcholu z grafu. Její přirozenou obdobou je operace odstranění hrany. Jedná se o pouhé smazání hrany se zachováním jejich koncových vrcholů.

Definice 5.19 Je-li e hrana grafu $G = (V, E)$, potom graf $G - e$ vzniklý *odstraněním hrany* e je definován jako $(V, E \setminus \{e\})$.

Věta 5.20 *Je-li e hrana souvislého grafu G, která leží na nějaké kružnici, potom $G - e$ je souvislý graf.*

Důkaz. Nechť $e = xy$ je hranou kružnice C. V kružnici C existují dvě cesty z vrcholu x do vrcholu y; tu z nich, která má délku větší než 1, označme P.

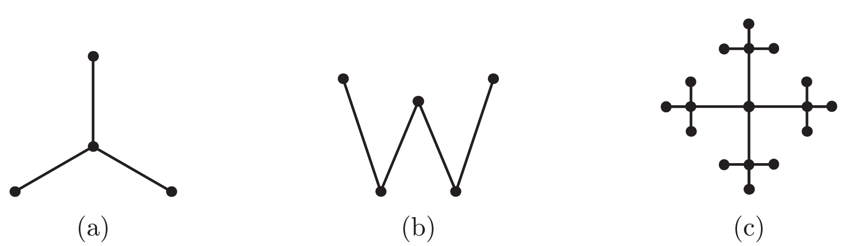
Dokazujeme, že $G-e$ je souvislý graf. K tomu stačí najít sled mezi libovolnými dvěma vrcholy u, v. Nechť S je cesta z u do v v (souvislém) grafu G. Pokud S nepoužívá hranu e, je cestou i v grafu $G-e$. Pokud ji používá, můžeme tuto hranu nahradit cestou P. Přesněji řečeno, pokud $S = (u = s_0, s_1, \dots, s_i = x, s_{i+1} = y, \dots, s_k = v)$ a $P = (x = p_0, p_1, \dots, p_\ell = y)$, vezmeme

$$S' = (u = s_0, s_1, \dots, s_{i-1}, x = p_0, p_1, \dots, p_\ell = y, s_{i+2}, \dots, s_k = v),$$

což je sled v grafu $G - e$. (V případě, že S hranu e používá v opačném směru, tedy $s_i = y$, $s_{i+1} = x$, vložíme i cestu P obráceně.) Důkaz je hotov. $\square$

5.9 Stromy

Definice 5.21 *Strom* je souvislý graf, který neobsahuje žádnou kružnici. *List* stromu T je libovolný vrchol, jehož stupeň v T je 1.



Obrázek 5.5: Stromy.

Několik příkladů stromů ukazuje obr. 5.5. Tyto stromy mají (zleva doprava) 3, 2 a 12 listů.

Tvrzení 5.22 *Každý strom má aspoň dva listy.*

Důkaz. Vezměme cestu P maximální možné délky ve stromu T. Nechť x je koncový vrchol cesty P. Každý soused vrcholu x musí ležet na cestě P, jinak by bylo možné ji prodloužit. Dejme tomu, že x není list a má tedy alespoň dva sousedy y_1, y_2. Sled, který dostaneme, pokud vyjdeme z vrcholu x do vrcholu y_1, dále po cestě P do y_2 a zpět do x, je kružnicí v grafu T. Ten je ale stromem a žádnou kružnici neobsahuje, takže x je skutečně list. Dalším listem je druhý koncový vrchol cesty P. □

V tomto oddílu si ukážeme tři důležité věty, z nichž každá charakterizuje stromy z jiného hlediska: věta 5.23 podle počtu cest mezi dvěma vrcholy, věta 5.24 podle počtu hran a konečně věta 5.26 podle nesouvislosti jistých podgrafů (tzv. faktorů).

Z definice je graf souvislý, obsahuje-li alespoň jednu cestu mezi každou dvojicí vrcholů. Pokud podmínku zesílíme a budeme požadovat existenci právě jedné cesty, pak podle následující věty budou této podmínce vyhovovat právě všechny stromy.

Věta 5.23 *Graf G je strom, právě když pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ existuje v grafu G právě jedna cesta z u do v.*

Důkaz. '$\Rightarrow$': Strom G je z definice souvislý, takže alespoň jedna cesta mezi každými dvěma vrcholy existuje. Nechť P, Q jsou dvě cesty z vrcholu u do vrcholu v, přičemž

$$
\begin{aligned}
P &= (u = p_0, p_1, \ldots, p_k = v),\\
Q &= (u = q_0, q_1, \ldots, q_\ell = v).
\end{aligned}
$$

Nechť i je nejmenší index takový, že $p_i \neq q_i$. Vzhledem k tomu, že cesty P a Q jsou různé, ale začínají v témže vrcholu, platí $1 \leq i \leq k, \ell$. Zvolme j nejmenší takové, že $j > i$ a q_j leží na cestě P. Víme, že přinejmenším q_ℓ na P leží, proto takový index j jistě existuje. Definujme sled S následujícím způsobem: vyjdeme z vrcholu p_{i-1} po cestě P do p_j a odtud po cestě Q zpět do $q_{i-1} = p_{i-1}$. Je jasné, že S je kružnice v grafu G, což je spor s předpokladem, že G je strom. Mezi u a v je tedy jen jediná cesta.

'$\Leftarrow$': Graf G, ve kterém mezi každými dvěma vrcholy existuje nějaká cesta, je jistě souvislý. Pokud by obsahoval kružnici, vedly by mezi libovolnými dvěma vrcholy této kružnice alespoň dvě cesty. Graf G, který splňuje náš předpoklad, je tedy stromem. □

Podle věty 5.16 má souvislý graf na n vrcholech aspoň $n-1$ hran. Následující věta říká, že stromy lze charakterizovat jako grafy, u nichž v tomto dolním odhadu počtu hran platí rovnost.

Věta 5.24 *Graf G je strom, právě když je souvislý a má $n-1$ hran.*

Důkaz. '$\Rightarrow$': Strom je z definice souvislý. Ukážeme indukcí podle počtu vrcholů, že má $n-1$ hran. Pro strom na jednom vrcholu tvrzení jistě platí. Nechť je dán strom G s $n > 1$ vrcholy a nechť v je některý jeho list (existuje podle tvrzení 5.22). Graf $G - v$ je strom (jak je vidět z definice) a má $n-1$ vrcholů a $m-1$ hran. Podle indukčního předpokladu je $m - 1 = (n-1) - 1$ a tedy $m = n - 1$, což jsme chtěli dokázat.

'$\Leftarrow$': Potřebujeme dokázat, že souvislý graf s n vrcholy a $n-1$ hranami neobsahuje kružnici. Opět použijeme indukci podle n, přičemž pro $n = 1$ je tvrzení triviální. Nechť souvislý graf G má $n-1$ hran. Kdyby stupně všech vrcholů byly větší než 1, pak jejich součet je alespoň $2n$ a počet hran (který je přesně polovinou z tohoto čísla) by byl alespoň n. Proto G musí obsahovat nějaký vrchol stupně nejvýše 1. Stupeň 0 však díky souvislosti můžeme vyloučit. Nechť tedy v je vrchol stupně 1. Graf $G - v$ má $n - 1$ vrcholů, $n - 2$ hran a je souvislý. Podle indukčního předpokladu je to strom. Opětovným přidáním vrcholu v nemůže vzniknout kružnice, takže stromem je i celý graf G. $\square$

Před poslední charakteristikou stromů potřebujeme ještě jeden pojem. Obojí se nám bude hodit později, až budeme hovořit o souvislostech mezi grafy a maticemi.

Definice 5.25 *Faktor* grafu G je libovolný jeho podgraf, jehož množina vrcholů je $V(G)$. Faktor je *vlastní*, je-li různý od grafu G.

Věta 5.26 *Graf G je strom, právě když je souvislý a nemá žádný souvislý vlastní faktor.*

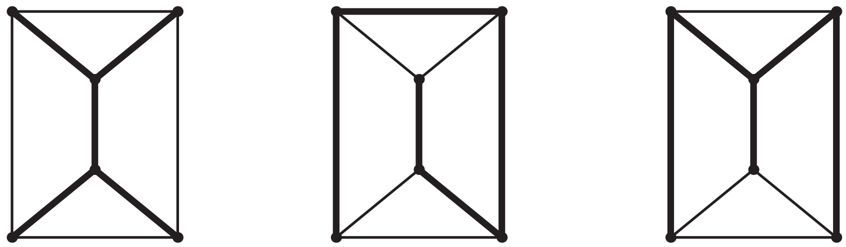
Důkaz. '$\Rightarrow$': Nechť strom G má souvislý vlastní faktor F. Protože $F \neq G$, existuje nějaká hrana $e \in E(G) \setminus E(F)$. Podle věty 5.20 musí $G - e$ být nesouvislý graf, protože G neobsahuje žádnou kružnici. Graf F je ovšem faktorem grafu $G - e$ a musí tak být rovněž nesouvislý. To je spor.

'$\Leftarrow$': Nechť G je graf, který nemá souvislý vlastní faktor. Dejme tomu, že obsahuje kružnici C. Pro $e \in E(C)$ je opět podle věty 5.20 $G - e$ souvislý graf. Jedná se však o vlastní faktor grafu G, a to je spor. Vzhledem k tomu, že souvislost grafu G předpokládáme, je věta dokázána. $\square$

5.10 Kostry

Definice 5.27 *Kostrou* souvislého grafu G je každý jeho faktor, který je stromem. Jinak řečeno, kostra grafu G je souvislý podgraf bez kružnic, který obsahuje všechny vrcholy grafu G.

Obr. 5.6 ukazuje 3 různé kostry téhož grafu. Upozorněme, že dosti častou chybou je záměna pojmů kostra a strom. Rozdíl je ale podstatný: konkrétní graf



Obrázek 5.6: Tři kostry téhož grafu (znázorněny tučně).

může nebo nemusí být stromem, ale pojem kostra se vždy váže ještě k dalšímu grafu, např. v otázce ‘Je graf G kostrou *grafu* H?’

Má každý graf kostru? Z toho, že každý faktor nesouvislého grafu je nesouvislý, vidíme, že nesouvislý graf žádnou kostru mít nemůže. Na druhou stranu platí následující tvrzení.

Tvrzení 5.28 *Každý souvislý graf má alespoň jednu kostru.*

Důkaz. Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf. Uvažme množinu hran M, která má vlastnost, že

$$\text{faktor } (V, M) \text{ grafu } G \text{ neobsahuje kružnice} \tag{5.1}$$

a je s touto vlastností maximální vzhledem k inkluzi. Tvrdíme, že faktor (V, M) je souvislý.

Dejme tomu, že to tak není a uvažme komponenty A, B grafu (V, M). V souvislém grafu G mezi A a B jistě vede nějaká hrana e. Přidáním této hrany k množině M kružnice vzniknout nemůže, to by totiž vedlo ke sporu s větou 5.20. Proto množina $M \cup \{e\}$ má rovněž vlastnost (5.1) a dostáváme spor s maximalitou množiny M. □

5.11 Soubor stupňů

Nechť G je graf (i nadále bez smyček a násobných hran). *Soubor stupňů* nebo také *skóre* grafu G je posloupnost čísel, kterou získáme, když seřadíme stupně všech vrcholů v grafu G od největšího k nejmenšímu. Například skóre grafu na obr. 5.5(a) je $(3, 1, 1, 1)$ a graf na obr. 5.5(b) má skóre $(2, 2, 2, 1, 1)$.

Budeme se zabývat především otázkou, které nerostoucí posloupnosti čísel jsou *grafové*, tj. mají tu vlastnost, že jsou souborem stupňů nějakého grafu. Je totiž jasné, že některé nerostoucí posloupnosti čísel grafové nejsou, třeba $(6, 6, 6)$ nebo $(2, 3)$. Na druhou stranu, jak ukazuje cvičení 5.10, jedné grafové posloupnosti může obecně odpovídat několik neisomorfních grafů.

Při letmém pohledu na cvičení 5.12 se ukazuje, že zodpovězení této otázky metodou pokusu a omylu může být náročný úkol (zkuste to!). Účinným nástrojem je však následující věta.

Věta 5.29 *Nechť* $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ *je nerostoucí posloupnost a* $n \geq 2$. *Posloupnost* $\mathbf{d}$ *je grafová, právě když je grafová posloupnost*

$$\mathbf{d}' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n).$$

Důkaz. '$\Leftarrow$': Nechť je dána posloupnost $\mathbf{d}$ a nechť $\mathbf{d}'$ je skóre grafu G'. Přidejme ke grafu G' nový vrchol v a spojme jej hranami s d_1 vrcholy nevyšších stupňů. Výsledný graf má skóre $\mathbf{d}$.

'$\Rightarrow$': Dejme tomu, že $\mathbf{d}$ je skóre grafu G. Přímočarým odstraněním vrcholu w s nejvyšším stupněm bohužel nemusíme dostat graf se skóre $\mathbf{d}'$ — k tomu bychom potřebovali, aby sousedy vrcholu w bylo d_1 vrcholů, jejichž stupně jsou nejvyšší hned po w. Naší strategií proto bude upravit G na graf se stejným skóre, který tuto vlastnost má.

Nechť H je libovolný graf se skóre $\mathbf{d}$. Seřaďme jeho vrcholy do posloupnosti $(v_1, \ldots, v_n)$ tak, že stupeň vrcholu v_i je d_i (jinak na výběru seřazení nezáleží). Definujme *kvalitu* $q(H)$ grafu H jako největší i, pro které platí, že vrchol v_1 sousedí se všemi vrcholy $v_2, \ldots, v_i$. (Pokud jsou nesousední již vrcholy v_1, v_2, položíme $q(H) = 1$.) Nechť H_0 je graf s nejvyšší možnou kvalitou mezi všemi grafy se skóre $\mathbf{d}$.

Předpokládejme nejprve, že $q(H_0)$ je nejvýše d_1. Mezi d_1 vrcholy $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$ je tedy vrchol v_j, který nesousedí s vrcholem v_1. Protože stupeň vrcholu v_1 je d_1, musí nutně existovat nějaký jeho soused v_k, kde $k > d_1 + 1$. Tvrdíme, že existuje vrchol v_ℓ s vlastností

$$v_j v_\ell \in E(H), \quad \text{ale} \quad v_k v_\ell \notin E(H). \tag{5.2}$$

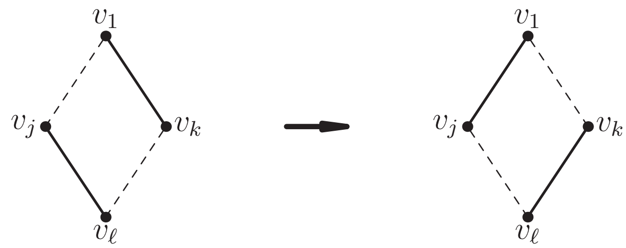
Jinak by totiž každý soused vrcholu v_j byl i sousedem vrcholu v_k, a s ohledem na vrchol v_1 bychom dostali $d_j < d_k$. To je nemožné, protože $j < k$ a posloupnost $\mathbf{d}$ je nerostoucí. Vrchol v_ℓ s vlastností (5.2) tedy existuje.

Vrcholy v_1, v_j, v_k a v_ℓ tvoří 'konfiguraci' na levé straně obr. 5.7. Pokud hrany $v_1 v_k$ a $v_j v_\ell$ nahradíme v grafu H_0 hranami $v_1 v_j$ a $v_k v_\ell$, stupně vrcholů (a tedy ani skóre) se nezmění, ale kvalita výsledného grafu bude vyšší. To je spor s maximalitou $q(H_0)$.

Dokázali jsme, že $q(H_0) > d_1$, takže vrchol v_1 sousedí s vrcholy $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$. Nyní ovšem graf vzniklý odstraněním vrcholu v_1 z grafu H_0 má skóre $\mathbf{d}'$. Posloupnost $\mathbf{d}'$ je tedy grafová, což jsme chtěli dokázat. □

Cvičení

► **5.9** Zjistěte skóre grafů:



Obrázek 5.7: Zvýšení kvality grafu v důkazu věty 5.29. Hrany jsou znázorněny plně, ‘nehrany’ čárkovaně.

(a) úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ (m červených a n modrých vrcholů, každé dva různobarevné jsou spojeny hranou),

(b) Hasseův diagram Booleovy algebry 2^X, kde $X = \{1, \ldots, n\}$.

▶ **5.10** Najděte dvojici neisomorfních grafů se stejným skóre.

▶ **5.11** Pro která n existuje graf se skóre $(n, n-1, \ldots, 1)$?

▶ **5.12** Rozhodněte, zda následující posloupnost je souborem stupňů nějakého neorientovaného grafu bez smyček a násobných hran:

(a) (5,5,4,4,3,3),

(b) (7,6,6,5,4,4,4,3,3,3,2),

(c) (5,5,5,4,4,3,2).

▶ **5.13** * Graf je *k-regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stupeň k.

(a) Dokažte, že na n vrcholech existuje 3-regulární graf, právě když n je sudé.

(b) Charakterizujte dvojice (n, k) s vlastností, že existuje nějaký k-regulární graf na n vrcholech.